Figura 1: Universidad Nacional De San Luis

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS —

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales

Departamento de Matemática

Cálculo de Variaciones

Trabajo Final de la Licenciatura

Natalí Ailín Cantizano

Directora: Analía Silva

Marzo, 2017

Índice general

Agradecimientos

Gracias a todos los que me motivaron para darme la confianza e impulsado a rendir al máximo. A tomar todo a través del esfuerzo que nos brinda cada situación, solo nosotros lo podemos hacer, y nos ayudamos psíquica y emocionalmente para que cada vez que nos dicen, “¿podés?”nos brinde esa misma realidad que podemos atesorar. Gracias a todos los que me brindaron su apoyo en el esfuerzo que me permitió cumplir.

Introducción

Supongamos que deseamos resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, lo podemos escribir por simplicidad de la siguiente forma:

$$A[u] = 0. \tag{0.1}$$

en donde A es el operador y u es la incógnita. Por supuesto, no hay teoría general para resolver todas las *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.*

El propósito de este trabajo final, es explicar una técnica muy conocida para la resolución de estos problemas que es llamada "cálculo de variaciones" . Ver [3] , [5], [6], [7], [9].

Dicha técnica se utiliza para resolver problemas en los que el operador se puede ver como la derivada de otro operador lineal que normalmente llamamos funcional de energía $I[\cdot]$. Es decir $A[\cdot] = I'[\cdot]$. Por lo cual, para resolver la ecuación (0.1) alcanza con buscar una u tal que

$$I'[u] = 0. \tag{0.2}$$

La ventaja de esta nueva formulación es que ahora podemos reconocer soluciones de (0.1) como puntos críticos de $I[\cdot]$. Esto, en ciertas circunstancias puede ser relativamente fácil de encontrar. Si, por ejemplo, el funcional $I[\cdot]$ tiene un mínimo en u, entonces (0.2) es válida, por lo cual u es una solución de la ecuación original PDE (0.1). *Resumiendo, la cuestion es, que si bien, es difícil resolver* (0.1) *directamente, en general es mucho más fácil encontrar un punto crítico del funcional* $I[\cdot]$.

Esta monografía se organizara de la siguiente forma:

En el capítulo 1, definimos espacios de Sobolev y desarrollaremos sus propiedades junto con los Teoremas necesarios, para dar el marco funcional adecuado a la formulación de nuestro problema.

En el capítulo 2, mostraremos como la soluciones de la ecuación pueden ser vistas como puntos críticos de ciertos funcionales. Luego daremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de dichos puntos críticos, en el caso particular que estos sean un mínimo. También bajo cierta circunstancias probaremos la unicidad de dicho mínimo.

En el capítulo 3, veremos el conocido Teorema de paso a la montaña, que permite hallar puntos críticos de funcionales que no necesariamente son un mínimo. Mostraremos también como usar dicho Teorema para probar existencia de solución para una ecuación que involucra el p-laplaciano.

Finalmente, incluiremos un apéndice en donde están enunciados todos los resultados de análisis necesarios para entender este trabajo.

Capítulo 1

Espacios de Sobolev

El propósito de este capítulo es dar una breve introducción a los espacios de Sobolev. Nos propondremos analizar las definiciones y teoremas básicos de este tema basandonos principalmente en el bien conocido libro de Evans. Para comenzar introduciremos la siguiente notación:

Notación 1.1. Sea $\phi \colon U \to \mathbb{R}$ con soporte compacto en $U \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Decimos que $\phi \in C_c^{\infty}(U)$ si es función infinitamente diferenciable.

Ahora daremos una motivación de la importancia de estos espacios.

Supongamos que tenemos la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } U \\ u = 0, & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{1.1}$$

Como es sabido esta ecuación no es tan fácil de resolver. Pero, si suponemos que u es una solución de (1.1) al multiplicar a ambos lados de la igualdad por una función φ perteneciente al espacio de las $C_0^{\infty}(U)$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$-\Delta u \varphi = f \varphi.$$

Ahora integrando sobre todo U, nos queda que:

$$-\int_U \Delta u \varphi = \int_U f \varphi. \tag{1.2}$$

Por otro lado, notemos que utilizando la regla de integración por partes (Formula de Green) en el miembro de la izquierda de la igualdad tenemos

$$-\int_U \Delta u \varphi dx = \int_U \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\delta U} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS.$$

Además, como el segundo termino del miembro derecho es cero (pues $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$)

$$-\int_U \Delta u \varphi = \int_U \nabla u \nabla \varphi dx.$$

Luego reemplazando en (1.2) nos quedaría la siguiente igualdad válida para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$

$$\int_U \nabla u \nabla \varphi dx = \int_U f\varphi. \tag{1.3}$$

Por lo tanto, en vez de buscar una solución para (1.1), encontraremos una solución para esta última igualdad tal que se cumpla para toda φ en $C_c^\infty(U)$. Para esto impartimos las siguientes Definiciones.

1.1. Derivada débil

La derivada débil se define en teŕminos distribucionales.

Definición 1.2. Sea $u \in L^1_{loc}(U)$ decimos que u induce una distribución si

$$< u, \varphi >= \int_U u\varphi \, dx \;\; \forall \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Ahora nos proponemos definir una derivada débil en el sentido de las distribuciones.

$$< \partial_i u, \varphi >= \int_U \partial_i u\varphi \, dx.$$

Por otro lado, si usamos partes en el lado derecho obtenemos

$$\int_U \partial_i u\varphi \, dx = -\int_U u\partial_i\varphi \, dx + \int_{\partial U} u\varphi \, \nu^i \, ds.$$

como $\phi \in C_c^\infty(U)$ el último termino se anula. Motivando así la definición de la derivada débil de la siguiente forma

$$< \partial_i u, \varphi >= -\int_U u\partial_i\varphi \, dx.$$

Definición 1.3. Sea $u \in L^1_{loc}$ tiene derivada en el sentido débil si

$$< \partial_i u, \varphi >= -\int_U u\partial_i\varphi \; \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

Una inquietud natural es: si $\partial_i u$ puede ser representada por una función, es decir, si existe $g_i \in L^1_{loc}(U)$ tal que

$$< \partial_i u, \phi >= \int_U g_i\phi dx.$$

De existir tal g_i es denominada derivada débil.

Observación 1.4. Si existe una $g_i \in L^1_{loc}(U)$ tal que $< \partial_i u, \varphi >= \int_U g_i\varphi dx$, esta g_i es única.

Demostración. Suponemos que $g_i, \tilde{g}_i \in L^1_{loc}$ tal que ambas representan la derivada débil de u, aplicando la definición.

$$\int_U g_i \varphi \, dx = -\int_U u \partial_i \varphi \, dx = \int_U \tilde{g}_i \varphi \, dx.$$

Restando las igualdades se obtiene

$$\int_U (g_i - \tilde{g}_i)\varphi \, dx = 0$$

Como esto es cierto para toda $\varphi \in C_c^\infty$, se concluye que $g_i - \tilde{g}_i = 0$ c.t.p. Como queríamos probar. □

Ahora estamos en condiciones para definir los espacios de Sobolev.

1.2. Espacios de Sobolev

Definición 1.5. Sea $u \in L^1_{loc}(U)$ decimos que es función de Sobolev si sus derivadas débiles $\partial_i u$ $i = 1, ..., n$ son representados por $g_i \in L^1_{loc}(U)$ $i = 1, ..., n$.

Notación 1.6. El espacio de las funciones de Sobolev lo vamos a denotar $W^{1,1}_{loc}(U)$

Definición 1.7. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $1 \leq p \leq \infty$ se define el espacio de Sobolev

$$W^{1,p}(U) = \{u \in W^{1,1}_{loc}(U) : \partial_i u \in L^p(U) \ i = 1, ..., n\}.$$

Y su norma esta definida de la siguiente forma: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $1 \leq p \leq \infty$

$$\|u\|_{1,p} := \begin{cases} (\|u\|^p_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^\infty}, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

Observación 1.8. Para $p = 2$ se puede definir la norma a partir de un producto interno, definido de la siguiente forma:

$$(u, v) = \int_U uv \, dx + \sum_{i=1}^n \int_U \partial_i u \partial_i v \, dx.$$

Y su norma se define como:

$$\|u\|_{1,2}(U) = (u, u)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.9. *Si* $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(U)$ *resulta ser un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(U)$, entonces, por cada $i = 1, \ldots, n$ las sucesiones $\{u_m\}_{m=0}^\infty$ y $\{\partial_i u_m\}_{m=0}^\infty$ están en $L^p(U)$. Como este espacio es completo existen funciones u, g_i en $L^p(U)$ tales que

$$\|u_m - u\|_{L^p(U)} \to 0$$

y

$$\|\partial_i u_m - g_i\|_{L^p(U)} \to 0 \text{ por cada } i = 1, \ldots, n.$$

Solo resta probar que $\partial_i u = g_i$. En efecto, para toda ϕ en $C_c^\infty(U)$

$$\int_U u\partial_i \phi \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m \partial_i \phi \, dx = -\lim_{m\to\infty} \int_U \partial_i u_m \phi \, dx = -\int_U g_i \phi \, dx$$

y en consecuencia

$$\int_U u\partial_i \phi \, dx = -\int_U g_i \phi \, dx \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(U).$$

Esto dice que $\partial_i u = g_i$,por lo tanto $W^{1,p}(U)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$ como queríamos probar.

□

Observación 1.10. Cuando $p = 2$, $W^{1,2}(U)$ es un espacio de Hilbert, con el siguiente producto interno

$$(f, g) = \int_U fg \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_U \partial_i f \partial_i g \, dx.$$

En este caso vamos a utilizar la siguiente notación: $W^{1,2}(U) = H^1$

Teorema 1.11. *Para* $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(U)$ *es un espacio separable.*

Demostración. Se considera la isometría

$$i : W^{1,p}(U) \to \underbrace{L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)}_{n+1-veces}$$

definida por $i(u) = (u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, para $1 \leq p < \infty$.

Considerando ahora que para $1 \leq p < \infty$ el espacio $L^p(U)$ es separable y así también es separable el conjunto $\underbrace{L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)}_{n+1-veces}$ también lo es.

Teniendo en cuenta esto, resulta que $i(W^{1,p}(U)) \subseteq L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)$ es separable y usando el hecho de que un subconjunto de un espacio métrico separable es también separable se cumple que $i(W^{1,p}(U))$ es separable y en consecuencia el conjunto $W^{1,p}(U)$ es también separable como se quería demostrar.

□

Durante esta tesis vamos a necesitar el siguiente teorema de análisis funcional. No incluiremos la demostración.

Teorema 1.12. *Para* $1 < p < \infty$ $W^{1,p}(U)$ *es un espacio reflexivo.*

Observación 1.13. Para ser más percisos lo que vamos a utilizar, es un resultado que dice que: X es reflexivo si y solo si la esfera unitaria B_x es compacta con la topología débil.

Ahora comprobaremos mediante un ejemplo, que el espacio definido no es vacío.

Ejemplo 1.14. Sea $U = B_1(0)$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ y consideremos

$$u(x) = |x|^{-\gamma} \text{ con } \gamma > 0 \text{ y } x \in U, x \neq 0.$$

Nuestro interrogante, es para qué valores de γ se cumple que u pertenece a $W^{1,p}(U)$. Es decir,para esto se debe cumplir que $u \in L^p(U)$ y $\partial_i u \in L^p(U)$.

En primer lugar, para asegurar que $u \in L^p(U)$, queremos que $|x|^{-\gamma p} \in L^1(U)$. Por lo tanto, necesitamos que $\gamma p < n$.

Por otro lado, sabemos que las derivadas parciales de u son de la siguiente forma $\partial_i u(x) = -\gamma \frac{x_i}{|x|^{\gamma+2}}$. Entonces, elevando a la p, tenemos que $|\partial_i u(x)|^p = \gamma^p \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\gamma+2}}\right)^p$. Ahora sumando todas las derivadas obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |\partial_i u(x)|^p = \sum_{i=1}^{n} \gamma^p \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\gamma+2}}\right)^p = \gamma^p \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}{|x|^{(\gamma+2)p}}. \tag{1.4}$$

Por otro lado , observemos la siguiente estimación:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^p \leq n|x|^p.$$

$$|x|^p \leq n^p \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^p \leq n^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p.$$

Es decir, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \sim |x|^p$$

Luego al aplicar esto a (1.4), nos queda una estimación de la derivada:

$$\sum_{i=1}^{n} |\partial_i u|^p \sim \frac{1}{|x|^{(\gamma+1)p}}$$

Por lo tanto, necesitamos que $(\gamma + 1)p < n$, es decir, $\gamma < \frac{n-p}{n}$.

Finalmente, nos falta ver que la derivada débil coincide con la derivada usual en $U - \{0\}$. Usando la definición de derivada débil:

$$< \partial_i u, \phi >= -\int_{B_1(0)} u\partial_i \phi dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} u\partial_i \phi dx.$$

Entonces, aplicando partes tenemos la siguiente igualdad:

$$-\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} u\partial_i\phi dx = \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i u\phi dx - \int_{\partial(B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0))} u\phi\eta_i dS.$$

Como ϕ se anula en el borde de la bola unitaria, el lado derecho de la igualdad lo podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i u\phi dx - \int_{\partial(B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0))} u\phi\eta_i dS = \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i u\phi dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\phi\eta_i dS.$$

Siendo $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ la normal unitaria apuntando hacia el interior en $\partial B_\varepsilon(0)$.

Ahora, veremos que el último término tiende a cero cuando ε tiende a cero. En efecto

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\phi\eta_i dS \right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\gamma}|\phi| dS \leq \varepsilon^{-\gamma}|\partial B_\varepsilon(0)|\|\phi\|_\infty = \varepsilon^{-\gamma}\varepsilon^{n-1}|\partial B_1(0)|\|\phi\|$$

Luego necesitamos que γ sea más chico que $n-1$

De esta manera, la derivada usual y la débil son la misma, que era lo que nos faltaba demostrar. Por lo tanto la función propuesta, pertenece al espacio de Sobolev.

1.3. Espacios de Sobolev de orden mayor

Para estudiar el espacio de Sobolev de orden mayor necesitamos introducir las siguientes definiciones:

Definición 1.15. 1. Un multiíndice es un vector α, de la forma, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ para $i = 1, \dots, n$.

2. Decimos que k es el orden de un multiíndice si $k = |\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

3. Se define $D^\alpha u(x)$ como

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots, \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Luego, siguiendo las ideas utilizadas para definir derivada débil de primer orden, daremos inductivamente la definición de derivada débil de orden superior.

Definición 1.16. La derivadada $D^\alpha u$ débil verifica:

$$\int_U D^\alpha u\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U uD^\alpha\phi\, dx \ \ \forall\phi \in C_c^\infty(U).$$

Motivamos esta definición utilizando Inducción. El paso base $k = 1$ es valida por ser la definición (1.3) dada al comienzo del capítulo. Supongo válido el enunciado para el valor k, entonces debo probarlo para k+1.

$$\int_U D^\beta u\phi dx = \int_U D^{(\tilde{\beta},\alpha)} u\phi dx = -\int_U D^\alpha u D^{\tilde{\beta}}\phi dx.$$

Donde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k+1})$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $\alpha = \beta_{k+1}$. Por hipótesis inductiva el último miembro es igual a

$$-(-1)^{|\alpha|}\int_U u D^\beta \phi dx = (-1)^{(k+1)}\int_U u D^\beta \phi dx.$$

Y así hemos llegado a lo que queriamos.

Definición 1.17. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $1 \leq p \leq \infty$ se define el espacio de Sobolev de orden k inductivamente como:

$$W^{k,p}(U) := \left\{ u \in W^{1,p}(U) : \partial_i u \in W^{k-1,p}(U),\ \ i = 1, \dots, n \right\}$$

En este espacio definimos la siguiente norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right), & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}^p, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Teorema 1.18. *El espacio $W^{k,p}(U)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$.*

Este teorema no lo demostramos, pues su prueba es analoga a 1.9.

Observación 1.19. El espacio $W^{k,2}(U)$ es un espacio de Hilbert (el cual denotamos $H^k(U)$) con el siguiente producto interno:

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u \, D^\alpha v.$$

1.4. Espacio $W_0^{1,p}(U)$

Como se sabe, establecer los valores de una función en la frontera de un conjunto, siendo la función continua, no representa problema, pero en cambio si esta está definida en casi todo punto, no tiene sentido definirla en la frontera, pues este es un conjunto de medida cero. Por lo tanto, se dice que una función perteneciente al espacio $W^{1,p}(U)$ se anula en el borde en un sentido débil.

Definición 1.20. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto , con $1 \leq p < \infty$ se define el espacio de funciones de Sobolev que se anulan en el borde de la siguiente manera:

$$W_0^{1,p}(U) := \overline{C_c^\infty(U)}.$$

Donde la clausura se toma con respecto a la norma $\|\cdot\|_{1,p}$.

Observación 1.21. 1. La clausura de un subespacio es un subespacio, por lo tanto, $W_0^{1,p}(U)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(U)$, por esto tenemos que $W_0^{1,p}(U)$ es completo, separable para $1 \leq p < \infty$ y reflexivo para $1 < p < \infty$.

2. Por definición las funciones C^∞ son densas en $W_0^{1,p}(U)$.

3. Si $U_1 \subset U_2$ entonces, $C_c^\infty(U_1) \subset C_c^\infty(U_2)$. Por lo tanto, $W_0^{1,p}(U_1) \subset W_0^{1,p}(U_2)$, donde las funciones definidas sobre U_1 se extienden por cero a U_2.

Proposición 1.22. *Si $U = \mathbb{R}^n$ $1 \leq p < \infty$, tenemos, $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Para la demostración utilizaremos los siguientes hechos:

1. Las funciones con soporte compacto son densas en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

2. Sea el núcleo regularizante estandar ρ_ε definido como:

$$\rho \in C_c^\infty(V) \;\; \rho_\varepsilon(x) = (\varepsilon)^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon}) \tag{1.5}$$

podemos construir una sucesión regular que aproxime a una función de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ver Apéndice.

Ahora, sea $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\delta > 0$. Entonces, existe $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $sop(g)$ compacto, tal que

$$\|f - g\|_{1,p} < \frac{\delta}{2}.$$

Ahora, sea ρ el núcleo regularizante estándar (1.5) y $g_\varepsilon = \rho_\varepsilon * g$. Tenemos $g_\varepsilon \in C_0^\infty$(pues g es de soporte compacto) y por el segundo item,

$$\|g_\varepsilon - g\|_{1,p} < \frac{\delta}{2} \text{ cuando } \varepsilon \to 0$$

Luego, si ε_0 es tal que $\|g_{\varepsilon_o}\|_{1,p} < \frac{\delta}{2}$, se tiene que

$$\|f - g_{\varepsilon_0}\|_{1,p} \leq \|f - g\|_{1,p} + \|g_\varepsilon - g\|_{1,p} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Con esto se ha demostrado el enunciado.

□

1.5. Desigualdad de Poincaré

Una de las desigualdades más importantes para funciones de Sobolev es la desigualdad de Poincaré.

Teorema 1.23. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, suponemos que existen constantes a y b pertenecientes a los reales tales que $a < b$ y $U = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < b\}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante $c > 0$ que depende de $(b-a)$ y p tal que.*

$$\int_U |u|^p dx \leq c \int_U |\nabla u|^p dx \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(U)$$

Demostración. Dado que $W_0^{1,p}(U)$ es la clausura de las funciones infinitamente difereciables con soporte compacto, basta verificar el teorema para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que el soporte de u este incluido en $\{a < x^1 < b\}$.

Sea $u(x) = u(x^1, x') = \int_a^{x^1} \partial_1 u(t, x')dt$.

Entonces

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &\leq \left(\int_a^b |\partial_1 u(t,x')|dt\right)^p \\
&\leq \left(\|\chi_{[a,b]}\|_{p'} \|\partial_1 u\|_p\right)^p \\
&\leq (b-a)^{\frac{p}{p'}} \int_a^b |\partial_1 u(t,x')|^p dt \\
&\leq (b-a)^{p-1} \int_a^b |\nabla u(t,x')|^p dt.
\end{aligned}$$

Luego integrando en R^n tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b \int_{R^{n-1}} \int_a^b |\nabla u(t,x')| dt dx' dx_1$$

$$= (b-a)^{p-1}(b-a) \int_{\mathbb{R}^n - 1} \int_a^b |\nabla u(t,x')| dt dx' = (b-a)^p \int_{R^n} |\nabla u|^p dx$$

Finalmente, como el $sop(|\nabla u|) \subset sop(u) \subset U$, se tiene lo que se quería demostrar.

□

La siguiente observación es una consecuencia del teorema de Poincaré 1.23 que utilizaremos muchas veces durante este trabajo.

Observación 1.24. Sea $u \in W_0^{1,p}(U)$

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

y sea $u \in W_0^{1,p}$, usando 1.23 tenemos que:

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p} \leq c\|\nabla u\|_{L^p}.$$

Por lo tanto la norma del espacio $W_0^{1,p}$ y la norma del gradiente en el L^p son equivalentes($\|u\|_{W_0^{1,q}(U)} \sim \|\nabla u\|_{L^q(U)}$).

Observación 1.25. Para $p = 2$ $W_0^{1,p}$ es un espacio de Hilbert, con el siguiente producto interno: $(f, g) = \int_U \nabla f \nabla g dx$. Vamos a utilizar la siguiente notación $H_0^1 = W_0^{1,p}$.

1.6. Desigualdad de Sobolev

Al estudiar los espacios de Sobolev surge una pregunta natural: ¿si u pertenece al espacio $W^{1,p}(U)$ podemos asegurar que u pertenece a otro espacio?. La respuesta es Sí, y depende de p. Nosotros nos concentraremos en el caso $1 \leq p < n$, que es la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Entonces estamos buscando una acotación del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.6}$$

Primero demostraremos que si la desigualdad (1.6) es verdadera, entonces, q no puede ser arbitrario. Para esto, tomo $u \in c_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u \neq 0$ y para $\lambda > 0$ definimos la función reescalada:

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \ \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

si aplicamos la desigualdad a esta función, tenemos

$$\|u_\lambda\|_{L^q} \leq c\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(R^n)} \tag{1.7}$$

Además

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy.$$

en la última igualdad estamos haciendo el cambio de variable $y = \lambda x$, $dy = \lambda^n dx$.

Por otro lado

$$\int_{R^n} |\nabla u|^p dx = \lambda^p \int_{R^n} |\nabla u(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{R^n} |\nabla u(y)|^p dy$$

Reemplazando en (1.7) nos queda

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_{L^q}(\mathbb{R}^n) \leq c\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Es decir, $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c\lambda^{(1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Ahora, si $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, haciendo $\lambda \to 0$ o $\lambda \to \infty$ tenemos una contradicción con que $u \neq 0$. Por lo tanto necesitamos que $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{p} = 0$, de esto se concluye que $q = \frac{np}{n-p}$.

Por lo tanto q no puede ser arbitrario. Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 1.26. Sea $1 \leq p < \infty$, el exponente crítico de Sobolev de p es

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 1.27. *(Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)*
Sea $1 \leq p < n$. Entonces existe una constante c, que depende de p y n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall u \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{1.8}$$

Demostración. 1. Caso $p = 1$

Como u tiene soporte compacto, para cada $i = 1, \dots, n$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i.$$

luego

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \ \ (i = 1, \dots, n)$$

Por lo tanto

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (i = 1, \dots, n).$$

al integrar esta desigualdad con respecto a x_1, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Recordemos la fórmula general de Holder: si $p_i > 1, i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, entonces, $\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} u_i dx \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n)}$

Utilizando esta formula, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ahora integrando con respecto a x_2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1_{i \neq 2}}^{n} I^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

Siendo

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1, \ \ I_i := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \ (i = 3, \dots, n)$$

Aplicando una vez más la versión extendida de la desigualdad de Holder, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.10}$$

Ahora de forma iterativa continuamos integrando con respecto a $x_3, \ldots, x_n$, llegando a la siguiente expresión:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n-1}{n}} \leq \prod_{i_1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1\ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|dx\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{1.11}$$

Esto es lo que queríamos probar para $p = 1$

2. Caso $1 < p < \infty$

   Aplicando la estimación (1.11) a la función $v := |u|^{\gamma}$ (siendo $\gamma > 1$ escogida adecuadamente) tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla|u|^{\gamma}|\,dx = \gamma\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\gamma-1}|\nabla u|\,dx\\ &\leq \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\right).\end{aligned} \tag{1.12}$$

   Ahora elegimos γ tal que $\gamma n/(n-1) = (\gamma-1)p/(p-1)$ despejando obtenemos $\gamma = p(n-1)/(n-p) > 1$ y asi $\gamma n/(n-1) = (\gamma-1)p/(p-1) = np/(n-p) = q$ entonces, usando este valor de γ en (1.12) obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}|Du|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

□

1.7. Teorema de Extensión

El siguiente teorema que enunciaremos sin dar demostración permite extender funciones del espacio $W^{1,p}(U)$ para convertirlas en funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, esto debe hacerse con cuidado pues si se extiende una función para que valga cero en $\mathbb{R}^n \setminus U$ se puede generar una discontinuidad tan mala sobre ∂U de modo tal que se pierda la derivada débil, el siguiente teorema dice como puede hacerse tal extensión adecuadamente.

Teorema 1.28. *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ acotado y con ∂U de clase C^1. Si V es un conjunto acotado que cumple $U \subset\subset V$ entonces existe un operador lineal acotado $E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de modo tal que para cada $u \in W^{1,p}(U)$ se cumple que:*

1. *$Eu = u$ casi en todo punto de U.*
2. *Eu tiene soporte dentro de V.*
3. *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, donde la constante C depende solo de p, U y V.*

Se dice que Eu es una extensión de u a $\mathbb{R}^n$.

1.8. Teorema de Inmersión

Teorema 1.29. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $\partial U \in C^1$, $1 \leq q \leq p^*$ y $1 \leq p < n$. Entonces $W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$ y existe una constante $C = c(n, p, q, U)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(U)$ entonces, por el Teorema de extensión existe $\bar{u} \in W^{1,p}(U)$ con *sop* $\bar{u}$ compacto, tal que $\bar{u}|_U = u$ y además

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Sea $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to \bar{u}$ en $W^{1,p}$ por 1.22. Además,$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}}(\mathbb{R}^n) \leq \|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ por 1.27. Cuando $m, l \to +\infty$ el último término tiende a cero, entonces:

$$u_m \to \bar{u} \text{ en } L^{p^*}(R^n)$$

Entonces por un lado, sabemos que existe una u tal que $u_m \to u$ en *ctp*. Pero por otro lado acabamos de probar que u_m tiende a $\bar{u}$ en *ctp*. Luego $\bar{u} = u$ en *ctp*. Además tenemos por 1.27 que

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Esto junto con el Teorema de extensión

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Hasta acá se prueba la desigualdad para p^*. Veamos que vale para $1 \leq q \leq p^*$ usando Hölder

$$\left(\int_U |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_U |u|^{q\alpha} dx\right)^{\frac{1}{q\alpha}} \left(\int_U 1^{\alpha'} dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}}$$

Llegamos a que si $\alpha = \frac{p^*}{q}$, se obtiene la desigualdad buscada.

∎

1.9. Compacidad

Hemos visto que 1.8 el Teorema de Gagliar-Nirenberg-Soblolev, dice que $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ con $1 \leq p < n$ y $p^* = \frac{pn}{n-p}$. A continuación vamos a demostrar que la inclusión es compacta.

Definición 1.30. Sea X e Y espacios de Banach tal que $X \subset Y$, decimos que X está compactamente contenido en Y, ($X \subset\subset Y$) si.

1. $\exists C > 0$ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in X)$

2. Cada sucesión acotada en X es precompacta en Y.

Teorema 1.31. *(Compacidad Rellich- Kondrachov). Sea U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con $\partial U \in C^1$ y $1 \leq p < n$. Entonces*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

para cada $1 \leq q < p^*$

Demostración. Sea $1 \leq q < p^*$, usando la desigualdad de Hölder (ver apéndice) y el hecho de que U es acotado se tiene que$W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$, $\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

Ahora, deseamos verificar que si $\{u_m\}$ es acotada en $W^{1,p}(U)$ entonces existe una $\{u_{m_j}\}$ convergente en $L^q(U)$.

Supongamos entonces una sucesión $\{u_m\}_m \in W^{1,p}(U)$ que esta uniformemente acotada, es decir

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq C \quad \forall m$$

tenemos que mostrar entonces que existe una subsucesión $\{u_{m_j}\}_j$ que converge en $L^q(U)$. Por el Teorema de extensión 1.28 podemos suponer que $U = \mathbb{R}^n$, que las funciones $\{u_m\}_m$ tienen todas soporte compacto en algún conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ y que

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty. \tag{1.13}$$

Ahora vamos a regularizar las funciones $\{u_m\}_m$ usando el núcleo regularizante η_ε definido como:

$$\eta \in C_c^\infty(V) \;\; \eta_\varepsilon(x) = (\varepsilon)^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon}) \tag{1.14}$$

siendo $sop\,\eta \subset B(0,1)$ y por lo tanto $sop\,\eta_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$.

Ahora, sea $u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m$ para $\varepsilon > 0$ y $m = 1, 2\ldots$, podemos entonces también suponer que las funciones u_m^ε tiene soporte compacto en el conjunto V.

Recordemos la definición de convolución:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Por lo que, $u_m^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)u_m(x-y)dy$.

Ahora hacemos el siguiente cambio de variables $y' = \frac{y}{\varepsilon}$, $dy' = dy\frac{1}{\varepsilon^n}$. Entonces, nos queda,

$$u_m^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y')u_m(x - \varepsilon y')dy'.$$

Primero probaremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} = 0 \tag{1.15}$$

uniformemente en m, para probar esto hacemos uso de la suavidad de las funciones

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon - u_m &= \int_{B(0,1)} \eta(y)(u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x))\, dy \\
&= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_m^\varepsilon(x - \varepsilon t y)\, dt\, dy \\
&= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m^\varepsilon(x - \varepsilon t y) y\, dt\, dy
\end{aligned}$$

Ahora ponemos valor absoluto e integramos sobre V y queda de esta forma:

$$\int_V |u_m^\varepsilon - u_m|\, dx \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x - \varepsilon t y)|\, dx\, dt\, dy \leq \varepsilon \int_V |Du_m(z)|\, dz$$

esta desigualdad vale para toda función en $W^{1,p}(V)$ aproximando con funciones regulares. Teniendo en cuenta que el conjunto V es acotado y usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon C \|Du_m\|_{L^p(V)}.$$

usando ahora (1.13) en la última desigualdad tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} = 0, \quad \forall m. \tag{1.16}$$

Teniendo en cuenta que $1 \leq q < p^*$ podemos usar la desigualdad de interpolación (ver apéndice) para llegar a

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\alpha \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\alpha}.$$

donde $\alpha = (p^* - q)/q(p^* - 1)$ de esta forma $\alpha > 0$, usando ahora (1.13) tenemos

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\alpha} \leq c \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{W^{1,p}(V)}^{1-\alpha} \leq C$$

y llegamos a

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\alpha$$

usando ahora (1.16) en la última desigualdad obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} = 0, \quad \forall m$$

de esta forma queda demostrado (1.15).

Ahora queremos utilizar el teorema de Arzela-Ascoli (ver apéndice), vamos a demostrar entonces que por cada $\varepsilon > 0$ la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ es uniformemente acotada y equicontinua, en efecto sea $x \in \mathbb{R}^N$ entonces

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\,dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_m^\varepsilon\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^N} < \infty.$$

para $m = 1, 2, \ldots$, esto último muestra que la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}_m$ es uniformemente acotada. Por otro lado

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\,dy \leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} < \infty.$$

así que

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} < \infty.$$

y esta última desigualdad dice que la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}_m$ es equicontinua.

Ahora dado $\delta > 0$ arbitrario vamos a demostrar que

$$\limsup_{j,k\to 0} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta \tag{1.17}$$

para ver esto usamos (1.15) con ε pequeño de modo que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \delta/2 \quad para \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1.18}$$

Observamos que las funciones u_m^ε y u_m tienen soporte compacto en algún conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, podemos usar el teorema de Arzela-Ascoli para obtener una subsecuencia $\{u_{m_j}^\varepsilon\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ la cual converge uniformemente sobre V, en particular tenemos que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \tag{1.19}$$

usando (1.18) y (1.19) obtenemos

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta$$

de esta forma probamos (1.17), usamos ahora (1.17) con $\delta = 1, 1/2, \ldots$ para encontrar una subsecuencia $\{u_{m_j}\}_j \subset \{u_m\}_m$ de modo que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0$$

a su vez esto último dice que $\lim_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0$, por lo tanto esta subsucesión es de Cauchy en $L^q(V)$ y en consecuencia es convergente. $\square$

1.10. Teorema de Trazas

En esta sección veremos la posibilidad de asignar un "valor frontera" sobre ∂U para una función $u \in W^{1,p}(U)$, asumiendo que el borde sea C^1. Si $u \in C(\overline{U})$, entonces claramente u tiene un valor en ∂U en el sentido usual. Como hemos comentado en la sección del espacio $W_0^{1,p}$, el problema es que una función $u \in W^{1,p}(U)$ no es en general continua y, en realidad solo está definida en casi todo punto en U. Como ∂U tiene medida cero, no existe un significado claro que podamos dar a la expresión u restringida a ∂U. La noción de un operador de trazas resuelve este problema. En esta sección analizaremos, el caso $1 \leqslant p < \infty$.

Teorema 1.32 (Teorema de trazas)**.** *Asumamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, ∂U es C^1. Entonces existe un operador lineal acotado*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U),$$

tal que:

1.

$$Tu = u|_{\partial U} \text{ si } u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U}).$$

2.

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

para cada $u \in W^{1,p}(U)$, con la constante C dependiendo solo de p y U.

Definición 1.33. Llamamos a Tu la traza de u en ∂U.

Demostración. Vamos a construir el operador en 4 pasos:

Paso 1 Asumamos primero que $u \in C^1(\overline{U})$. Fijamos $\hat{x} \in U$ y suponemos primero que:

∂U es plano cerca de $\hat{x}$, rigurosamente existe $r > 0$ tal que $\partial U \cap B \subset A := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$,

donde $B := B(\hat{x}, r)$. Por esto tenemos que:

$$B^+ := B \cap \{x \in \mathbb{R} : x_n \geqslant 0\} \subset \overline{U}.$$

Denotamos por $\widetilde{B}$ la bola concéntrica a B y de radio $\dfrac{r}{2}$.

Elegímos $\zeta \in C_c^\infty(B)$ con $\zeta \geqslant 0$ en B, $\zeta \equiv 1$ en $\widetilde{B}$. Denotamos por Γ a la porción de $\partial\Omega$ dentro de $\widetilde{B}$. Sea $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \cap A$.

Entonces si $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|\mathrm{d}x' &\leqslant \int_A \zeta|u|\mathrm{d}x' \\
&= -\int_{B^+} (\zeta|u|)_{x_n}\mathrm{d}x \\
&= -\int_{B^+} \zeta_{x_n}|u|\mathrm{d}x + \int_{B^+} \zeta(\text{sgn } u)u_{x_n}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left[\int_{B^+} |u|\mathrm{d}x + \int_{B^+} |Du|\mathrm{d}x\right],
\end{aligned} \tag{1.20}$$

y si $1 < p < \infty$

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}x' &\leqslant \int_A \zeta |u|^p \mathrm{d}x' \\
&= -\int_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x_n} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{B^+} \zeta_{x_n} |u|^p \mathrm{d}x + \int_{B^+} p|u|^{p-1} (\text{signo } u) u_{x_n} \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_{B^+} |u|^p \mathrm{d}x + C \int_{B^+} \zeta |u|^{p-1} |Du| \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_{B^+} |u|^p \mathrm{d}x + C \left[\int_{B^+} \frac{p-1}{p} |u|^p \mathrm{d}x + \int_{B^+} \frac{1}{p} |Du|^p \mathrm{d}x \right] \\
&\leqslant C \left[\int_{B^+} |u|^p \mathrm{d}x + \int_{B^+} |Du|^p \mathrm{d}x \right],
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

donde hemos usado la desigualdad de Young (ver apéndice).

Paso 2

Definición 1.34. Nosotros decimos que la frontera ∂U es C^k si para cada punto $\hat{x} \in \partial U$ existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k (renombrando y reorientado los ejes coordenados si es necesario) tal que

$$U \cap B(\hat{x}, r) = \{x \in B(\hat{x}, r) : \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}) < x_n\}.$$

Además, ∂U es C^∞ si ∂U es C^k para todo k, y ∂U es analítica si γ es analítica.

Proposición 1.35 (Rectificación de la frontera)**.** *Con frecuencia es necesario cambiar las coordenadas cerca de un punto de ∂U para "aplanar" la frontera. Para esto usamos la rectificación de la frontera cerca de $\hat{x}$. Fijamos $\hat{x} \in \partial U$, y elegimos r, γ como en la defininción1.34*

Definimos entonces

$$
\begin{cases}
y_i := \boldsymbol{\Phi_i}(x) := x_i & (i = 1, \ldots, n-1) \\
y_n := \boldsymbol{\Phi_n}(x) := x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}), &
\end{cases}
$$

y escribimos

$$y := \boldsymbol{\Phi}(x).$$

Similarmente, definimos

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Psi_i}(y) := x_i = y_i & (i = 1, \ldots, n-1) \\
\boldsymbol{\Psi_n}(y) := y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_{n-1}) = x_n, &
\end{cases}
$$

y escribimos

$$x := \boldsymbol{\Psi}(y).$$

Entonces $\Phi = \Psi^{-1}$, y la función $x \longmapsto \Phi(x) = y$ "rectifica ∂U" cerca de $\hat{x}$. Observemos también que $\det D\boldsymbol{\Phi} = \det D\boldsymbol{\Psi} = 1$.

Ahora para estar en el caso anterior. Aplicamos la estimación (1.20) o (1.21), según corresponda, y aplicando un cambio de variables (ver Proposición 1.35), obtenemos la siguiente cota, donde $\mathbf{\Psi}(\Gamma)$ es algún subconjunto abierto de ∂U que contiene a $\hat{x}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{\Psi}(\Gamma)} |u(x)|^p dS &= \int_{\Gamma} |u(\mathbf{\Psi}(y))|^p |\det D\mathbf{\Phi}(y)| dy' \\
&= \int_{\Gamma} |(u \circ \mathbf{\Psi})(y)|^p dy' \\
&\leqslant C\left[\int_{B^+} |(u \circ \mathbf{\Psi})(y)|^p dy + \int_{B^+} |(Du \circ \mathbf{\Psi})(y)|^p dy\right] \\
&\leqslant C\left[\int_{B^+} |u(\mathbf{\Psi}(y))|^p dy + \int_{B^+} \left|\big((D\mathbf{\Psi})(y)\big)^t\right|^p |(Du)(\mathbf{\Psi}(y))|^p dy\right] \\
&\leqslant C\left[\int_{B^+} |u(\mathbf{\Psi}(y))|^p dy + \int_{B^+} |(Du)(\mathbf{\Psi}(y))|^p dy\right] \\
&= C\left[\int_{\mathbf{\Psi}(B^+)} |u(x)|^p |\det D\mathbf{\Psi}(x)| \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{\Psi}(B^+)} |Du(x)|^p |\det D\mathbf{\Psi}(x)| \mathrm{d}x\right] \\
&\leqslant C\left[\int_U |u(x)|^p \mathrm{d}x + \int_U |Du(x)|^p \mathrm{d}x\right],
\end{aligned}$$

Paso 3 Como ∂U es compacto, entonces existe una cantidad finita de puntos $\hat{x}^i \in \partial U$ y subconjuntos abiertos $\Gamma_i \subset \partial U$ (con $i = 1, \ldots, N$) tales que $\partial U = \cup_{i=1}^N \Gamma_i$ y

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

con $i = 1, \ldots, N$. En consecuencia, si definimos

$$Tu := u|_{\partial U},$$

entonces

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \tag{1.22}$$

para alguna constante C apropiada, la cual no depende de u.

Paso 4 La desigualdad (1.22) se cumple para todo $u \in C^1(\overline{U})$. Ahora asumimos que $u \in W^{1,p}(U)$.

Teorema 1.36 (Aproximación global por funciones suaves)**.** *Asumamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, y que ∂U es C^1. Supongamos que $u \in W^{k,p}(U)$. Entonces existe una sucesión de funciones $u_m \in C^\infty(\overline{U})$ tal que*

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(U).$$

Observación 1.37. Si en el teorema anterior $u \in C(\overline{U})$ entonces

$$u_m \to u \text{ uniformemente en } \overline{U}$$

Entonces existe una sucesión, por el Teorema 1.36, de funciones $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\overline{U})$ que converge a u en $W^{1,p}(U)$. De la desigualdad (1.22) tenemos que

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}; \tag{1.23}$$

por lo tanto $\{Tu_m\}_{m=1}^{\infty}$ también es una sucesión de Cauchy en $L^p(U)$. Dado que $L^p(U)$ es completo, definimos

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m.$$

Veamos que T esta bien definido. Sea $\{v_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\overline{U})$ otra sucesión de funciones que también converge a u en $W^{1,p}(U)$. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $m_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\alpha - Tu_m\|_{L^p(\partial U)} &< \varepsilon; & \|\beta - Tv_m\|_{L^p(\partial U)} &< \varepsilon; \\ \|u - u_m\|_{W^{1,p}(U)} &< \varepsilon; & \|u - v_m\|_{W^{1,p}(U)} &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Si $m \geqslant m_0$ y donde $\alpha := \lim_{m\to\infty} Tu_m$ y $\beta := \lim_{m\to\infty} Tv_m$. Aplicando (1.23) y (1.24) tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\alpha - \beta\|_{L^p(\partial U)} &\leqslant \|\alpha - Tu_m\|_{L^p(\partial U)} + \|Tu_m - Tv_m\|_{L^p(\partial U)} + \|Tv_m - \beta\|_{L^p(\partial U)} \\ &< 2\varepsilon + C\|u_m - v_m\|_{W^{1,p}(U)} \\ &\leqslant 2\varepsilon + C\|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)} + C\|u - v_m\|_{W^{1,p}(U)} \\ &< (2C+1)\varepsilon, \end{aligned}$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario tenemos que $\alpha = \beta$, es decir, T está bien definido.

Luego T es un operador lineal y acotado.

Finalmente si $u \in W^{1,p} \cap C(\overline{U})$, notemos que, por la Observación 1.37, la sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\overline{U})$, construida en el Teorema 1.36, converge uniformemente a u en $\overline{U}$. Luego $Tu = u|_{\partial U}$. □

1.10.1. Su relación con $W_0^{1,p}$

Teorema 1.38 (Núcleo del operador de trazas). *Asumamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, ∂U es C^1. Entonces*

$$W_0^{1,p}(U) = \{u \in W^{1,p}(U) : Tu = 0\}.$$

Demostración.

($\subset$) Supongamos primero que $u \in W_0^{1,p}(U)$. Entonces por definición existe una sucesión de funciones $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(U)$ tal que

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(U).$$

Como $Tu_m = u_m|_{\partial U} = 0$ (para $m = 1, 2, \ldots$) y T es un operador lineal acotado, entonces

$$Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m = 0.$$

($\supset$) Sea $u \in W^{1,p}(U)$ tal que

$$Tu = 0. \tag{1.25}$$

La prueba se divide en varios pasos:

1. Usando el teorema de partición de la unidad (ver apéndice) y usando la rectificación de la frontera ∂U (como en la prueba del Teorema 1.32) podemos asumir que

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), u \text{ tiene soporte compacto en } \overline{\mathbb{R}^n_+}, \\ Tu = 0 \text{ en } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{1.26}$$

   Entonces existen funciones $v_m \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que

$$v_m \to u \text{ en } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), \tag{1.27}$$

   y

$$Tv_m = v_m|_{\partial\mathbb{R}^n_+} \to 0 \text{ en } L^p(\partial\mathbb{R}^n_+). \tag{1.28}$$

2. Si $x = (x', x_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, entonces

$$v_m(x', x_n) = v_m(x', 0) + \int_0^{x_n} (v_m)_{x_n}(x', t)\mathrm{d}t.$$

   Así,

$$|v_m(x', x_n)| \leqslant |v_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |(v_m)_{x_n}(x', t)|\mathrm{d}t. \tag{1.29}$$

   Integrando sobre $\mathbb{R}^{n-1}$(1.29) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_m(x', x_n)|^p \mathrm{d}x' &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[|v_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |(v_m)_{x_n}(x', t)|\mathrm{d}t\right]^p \mathrm{d}x' \\
&\leqslant 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_m(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} |(v_m)_{x_n}(x', t)|\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x'\right) \\
&= 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_m(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + x_n^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\fint_0^{x_n} |(v_m)_{x_n}(x', t)|\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x'\right) \\
&\leqslant 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_m(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + x_n^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \fint_0^{x_n} |(v_m)_{x_n}(x', t)|^p \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x'\right) \\
&\leqslant 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_m(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(v_m)_{x_n}(x', t)|^p \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t\right),
\end{aligned}$$

   en donde hemos aplicado la desigualdad de Jensen
   Haciendo $m \to \infty$ y aplicando 1.27 y 1.28 deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p \mathrm{d}x' \leqslant (2x_n)^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x', t)|^p \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t, \tag{1.30}$$

   para *c.t.p.* en R^n_+.

3. Sea $\zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\zeta \equiv 1 \text{ en } [0,1], \zeta \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}/[0,2], 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

y para cada m

$$\begin{cases} \zeta_m(x) := \zeta(mx_n) \ \ (x \in \mathbb{R}^n_+) \\ w_m(x) := u(x)(1-\zeta_m(x)). \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} (w_m)_{x_n}(x) = u_{x_n}(x)(1-\zeta_m(x)) - mu(x)\zeta'(mx_n) \\ D_{x'}w_m = (D_{x'}u)(1-\zeta_m). \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \mathrm{d}x &= \int_{R^n_+} |\zeta_m(x)Du(x) + mu(x)\zeta'(mx_n)e_n|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m Du|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_+} |mu(x)\zeta'(mx_n)|^p \mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m Du|^p \mathrm{d}x + m^p\int_0^{\infty} \zeta'(mt)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m Du|^p \mathrm{d}x + m^p\int_0^{2/m} |\zeta'(mt)|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t\right) \\ &= C(A+B),\end{aligned} \tag{1.31}$$

Donde

$$A := \int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m Du|^p \mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad B := m^p \int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t$$

4. Veamos que $A \to 0$ cuando $m \to \infty$. En efecto, notemos que como $\zeta_m \equiv 0$ si $x_n > 2/m$ tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m Du|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^{2/m} |\zeta_m|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2C}{m} \to 0, \end{aligned} \tag{1.32}$$

cuando $m \to \infty$.

5. Ahora veamos que $B \to 0$ cuando $m \to \infty$. De la desigualdad (1.30) tenemos que

$$
\begin{aligned}
B &= m^p \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x_n \\
&\leqslant m^p \int_0^{2/m} (2x_n)^{p-1} \left(\int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x', t)|^p \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_n \\
&\leqslant m^p \int_0^{2/m} (2x_n)^{p-1} \left(\int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x', t)|^p \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_n \\
&= m^p \left(\int_0^{2/m} (2x_n)^{p-1} \mathrm{d}x_n \right) \left(\int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t \right) \qquad (1.33) \\
&= \frac{2^{p-1}}{p} m^p x_n^p \Big|_0^{2/m} \left(\int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{2^{p-1}}{p} m^p \frac{2^p}{m^p} \left(\int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t \right) \\
&\leqslant \frac{2^{2p} C}{m} \to 0,
\end{aligned}
$$

cuando $m \to \infty$.

6. De las desigualdades (1.31), (1.32) y (1.33) deducimos que $Dw_m \to Du$ en $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Como es claro que $w_m \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ entonces

$$w_m \to u \text{ en } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

7. Entonces, como $w_m = 0$ en $0 < x_n < 1/m$, por aproximación a la identidad existe $u_m \in C_c^\infty(U)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Luego $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

$\square$

Capítulo 2

Cálculo de variaciones

En este capítulo desarrollaremos el método de cálculo de variaciones. Más precisamente, mostraremos como relacionar las soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales con la existencia de mínimos de funcionales. También daremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de dichos mínimos.

2.1. Primera variación. Ecuación de Euler-Lagrange

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con un borde suave ∂U,y sea $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \to \mathbb{R}$ una función suave que llamamos Lagrangiano.

Notación 2.1. Vamos a escribir

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) \text{ para } p \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}, \text{ y } x \in U.$$

Vease que a continuación "p" es el nombre de la variable que reeplazaremos por $Dw(x)$, y "z" la reemplazaremos por $w(x)$. Y sea $D_pL = (L_{p_1}, \ldots, L_{p_n})$, $D_zL = L_z$, y $D_xL = (L_{x_1}, \ldots, L_{x_n})$

Ahora nos haremos de una idea más precisa del objetivo de esta técnica asumimendo que $I[\cdot]$ tiene la siguiente forma

$$I[w] = \int_U L(D(w), w(x), x)dx, \tag{2.1}$$

para funciones suaves $w : \bar{U} \to \mathbb{R}$ tal que

$$w = g \text{ en } \partial U. \tag{2.2}$$

Haremos la suposición adicional de que existe una función suave u tal que satisface (2.2), es decir, $u = g$ en ∂U, y es un mínimo de $I[\cdot]$. Demostraremos que si u cumple esto, es automáticamente una solución de una ecuación diferencial no lineal. Para confirmar esto, primero elegimos cualquier función suave $v \in C_c^\infty(U)$ y nos construimos la siguiente función con imágen en los reales

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \ (\tau \in \mathbb{R}) \tag{2.3}$$

Como u es un mínimo de $I[\cdot]$ y $u + \tau v = u = g$ en ∂U, observamos que $i(\cdot)$ tiene un mínimo en $\tau = 0$. Por lo tanto

$$i'(0) = 0. \tag{2.4}$$

Más precisamente sea

$$i(\tau) = \int_U L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)dx. \tag{2.5}$$

Al derivar esta expresión, tenemos que:

$$i'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)v_{x_i} + L_z(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)vdx.$$

Al hacer $\tau = 0$ y usando (2.4), nos quedó que

$$0 = i'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x)v_{x_i} + L_z(Du, u, x)vdx.$$

Finalmente, como v es de soporte compacto, podemos integrar por partes y obtener

$$0 = \int_U -\sum_{i=1}^n \Big[(L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) \Big] vdx.$$

Como esta igualdad se cumple para toda función test v, concluimos que u es solución de la ecuación diferencial.

$$-\sum_{i=1}^n \Big[(L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) \Big] = 0 \text{ en } U. \tag{2.6}$$

Esta es la *ecuación de Euler-Lagrange* asociada al funcional de energía $I[\cdot]$ definido por (2.1).

En resumen, todo mínimo de $I[\cdot]$ es solución de la ecuación de Euler-Lagrange (2.6), o sea que podemos encontrar una solución a (2.6) al buscar mínimos de (2.1). A continuación daremos algunos ejemplos de la ecuación de Euler-Lagrange.

Ejemplo 2.2. (Ecuación de Dirichlet). Sea

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2.$$

Entonces $L_{p_i} = p_i \, (i = 1, \ldots, n)$, $L_z = 0$; y en consecuencia la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional,

$$I[w] := \frac{1}{2} \int_U |Dw|^2 dx.$$

es

$$\Delta u = 0 \text{ en } U.$$

Ejemplo 2.3. (Ecuación Generalizada de Dirichlet). Escribimos

$$L(p,z,x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}p_{x_i}p_{x_j}-wf\,dz,$$

donde $a^{ij}=a^{ji}$ $(i,j=1,\ldots,n)$. Entonces, $L_{p_i}=\sum_{j=1}^{n}a^{ij}(x)p_j$ $(i=1,\ldots,n)$, $L_z=-f(x)$. Por lo que la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional

$$I[w]:=\int_U\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}w_{x_i}w_{x_j}-wf\,dx.$$

es la ecuación lineal en forma de divergencia.

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_{x_j})_{x_i}=f \text{ en } U.$$

2.2. Segunda derivada.

Continuaremos con el espíritu de los cálculos efectuados en la sección anterior, para realizar la segunda derivada de $I[\cdot]$ en la función u. Como u es un mínimo de $I[\cdot]$, tenemos que:

$$i''(0)\geq 0, \tag{2.7}$$

con $i(\cdot)$ definido como en (2.3), podemos calcular:

$$\begin{aligned}i''(\tau)=&\int_U\sum_{i,j=1}^{n}L_{p_ip_j}(Du+\tau Dv,u+\tau v,x)v_{x_i}vx_j\\&+2\sum_{i=1}^{n}L_{p_iz}(Du+\tau Dv,u+\tau v,x)v_{x_i}v+L_{zz}(Du+\tau Dv,u+\tau v,x)v^2dx,\end{aligned}\tag{2.8}$$

Ahora hacemos $\tau=0$ y usando (2.7), tenemos

$$\begin{aligned}0\leq i''(0)=&\int_U\sum_{i,j=1}^{n}L_{p_ip_j}(Du,u,x)v_{x_i}vx_j\\&+2\sum_{i=1}^{n}L_{p_iz}(Du,u,x)v_{x_i}v+L_{zz}(Du,u,x)v^2dx,\end{aligned}\tag{2.9}$$

Esta desigualdad se mantiene para toda función test $v\in C_c^\infty(U)$.
Podemos extraer información util de la desigualdad (2.9). Primero notemos, que la desigualdad (2.9) es valida también si v es de Lipschitz y se anula en ∂U. Fijamos $\xi\in\mathbb{R}^n$ y definimos

$$v(x):=\epsilon\rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon}\right)\zeta(x) \quad \text{con } x\in U. \tag{2.10}$$

Donde $\zeta \in C_c^\infty(U)$ y $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función periódica definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad \rho(x+1) = \rho(x) \text{ con } x \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Por lo cual,

$$|\rho'| = 1 \ ctp. \tag{2.12}$$

Observemos que $v_{x_i}(x) = \rho'\left(\frac{x \cdot \xi}{\epsilon}\right)\xi_i\zeta + O(\epsilon)$ para ϵ pequeño, entonces al sustituir (2.10) en (2.9) llegamos a

$$0 \leq \int_u \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du, u, x)(\rho')^2\xi_i\xi_j\zeta^2 dx + O(\epsilon).$$

Por (2.12) y haciendo ϵ tender a cero, obtenemos la siguiente desigualdad.

$$0 \leq \int_u \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du, u, x)\xi_i\xi_j\zeta^2 dx.$$

Como esto se mantiene para toda $\zeta \in C_c^\infty(U)$, deducimos que

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du, u, x)\xi_i\xi_j \geq 0 \text{ para } \xi \in \mathbb{R},\ x \in U. \tag{2.13}$$

Veremos más adelante que esta condición contiene una pista para la hipótesis de la convexidad del Lagrangiano L necesaria para la teoría de existencia.

2.3. Existencia del Mínimo

Empezaremos con el interrogante, de cuando el funcional

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x)\, dx, \tag{2.14}$$

definido para una apropiada función $w : U \to \mathbb{R}$ la cual satisface la siguiente condición de borde

$$w = g \text{ en } \partial U \tag{2.15}$$

tiene un mínimo.

2.3.1. Coercitividad

.

Notemos que incluso una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ suave y acotada inferiormente, no necesariamente alcanza su mínimo. Por ejemplo e^x o $\frac{1}{1+x^2}$. Estos ejemplos sugieren que necesitamos pedir más condiciones. Ciertamente la forma más efectiva para esto, es suponer que $I[w]$ "crece rapidamente" cuando $|w|$ tiende a infinito.

Más especificamente, asumiremos que para q fijo. Vale que

$$1 < q < \infty$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha > 0, \beta \geq 0,\ L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta,\ \forall p \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ x \in U. \tag{2.16}$$

Notemos que la condición (2.16) nos da la siguiente desigualdad

$$I[w] \geq \alpha \|Dw\|^q_{L^q(U)} - \gamma \text{ siendo } \gamma := \beta|U| \tag{2.17}$$

Por lo cual, tenemos que $I[w] \to \infty$ cuando $\|Dw\|_{L^q(U)} \to \infty$. Usualmente se llama a (2.16) *condición de coercitividad* en $I[\cdot]$.

Volviendo a la idea de encontrar mínimos del funcional $I[\cdot]$, la desigualdad (2.16) parece razonable para funciones de $W^{1,q}(U)$ que satisfagan la condición de borde (2.15) en el sentido de las trazas. Después de todo, cuanto más amplio sea el conjunto de funciones para los cuales $I[w]$ esta definido, más candidatos tenemos para el mínimo.

Por lo tanto, definimos el conjunto de las funciones admisibles como:

$$\mathcal{A} := \{w \in W^{1,q}(U) : w = g \text{ en } \partial U \text{ en el sentido de trazas}\}.$$

Observar por (2.16) que $I[w]$ esta definido para cada $w \in \mathcal{A}$

2.3.2. Semicontinuidad

Observemos que si bien, una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla la condición de coecitividad (2.16), ciertamente alcanza su mínimo, podría no suceder lo mismo con $I[\cdot]$. Para entender esto, veamos:

$$m := \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w] \tag{2.18}$$

y sea $u_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots,$ tal que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión minimizante, es decir

$$I[u_k] \to m \text{ cuando } k \to \infty. \tag{2.19}$$

Ahora, queremos demostrar que esa sucesión minimizante converge al mínimo. Para esto, necesitamos algún resultado de compacidad, y esto es un problema pues el espacio $W^{1,q}(U)$ tiene dimensión infinita. Si utilizamos la desigualdad de coercitividad (2.16), solo podemos concluir que la sucesión minimizante permanece en un subconjunto acotado de $W^{1,q}(U)$. Pero esto no implica que exista una subsucesión que converga en $W^{1,q}(U)$.

Por lo tanto, ponemos nuestra atención en la *Topología débil* (ver apéndice). Como asumimos que $1 < q < \infty$, tal que $L^q(U)$ es reflexivo, concluimos que existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$ y una función $u \in W^{1,q}(U)$ tal que

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ débilmente en } L^q(U) \\ Du_{k_j} \rightharpoonup Du \text{ débilmente en } L^q(U). \end{cases} \tag{2.20}$$

De aquí en adelante abreviaremos (2.20) de la siguiente manera

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ débilmente en } W^{1,q}(U). \tag{2.21}$$

y además, $u = g$ en ∂U en el sentido de las trazas, entonces $u \in \mathcal{A}$.

En concecuencia, al utilizar la topología débil recuperamos suficiente compacidad de la condición de coercitividad (2.17) para deducir (2.21) para una sucesión apropiada. En efecto, por la desigualdad (2.17) tenemos que si I mínimo entonces $\|Du_k\|_{L^q(U)}$ esta acotada, por lo cual $u \in W^{1,q}(U)$ y al ser este espacio reflexivo, se tiene (2.21). El problema radica en que el funcional $I[\cdot]$ no es continuo con respecto a la convergencia débil. Es decir, no podemos deducir de (2.19) y (2.21) que

$$I[u] = \lim_{j\to\infty} I[u_{k_j}], \tag{2.22}$$

siendo u un mínimo. El problema es que $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ no implica que $Du_{k_j} \to Du$ *ctp.*

Lo que nos salva, es la observación clave, de que no necesitamos completamente a (2.22), sino, sera suficiente con

$$I[u] \leq \liminf_{j\to\infty} I[u_{k_j}]. \tag{2.23}$$

Entonces de (2.19) y (2.23) podemos deducir que $I[u] \leq m$. Pero usando que u esta en el conjunto admisible y como m es un infimo tenemos que, $m \leq I[u]$. En concecuencia u es un mínimo.

Definición 2.4. Decimos que $I[\cdot]$ es (secuencialmente) débil semicontinua en $W^{1,q}(U)$, cuando satisface que $I[u] \leq \liminf_{k\to\infty} I[u_k]$ para $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $W^{1,q}(U)$.

Nuestra meta es encontrar condiciones sobre L que aseguren la semicontinuidad débil inferior de $I[\cdot]$.

2.3.3. Convexidad

Recordemos la forma que tenía la segunda derivada que obtuvimos anteriormente.

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x)\xi_i \xi_j \geq 0 \text{ para } \xi \in \mathbb{R},\ x \in U.$$

Esta desigualdad sugiere que es razonable asumir que si L es convexa en su primer variable.

Teorema 2.5. *(débil) semicontinua inferiormente*
Si L es acotada inferiormente y $p \mapsto L(p,z,x)$ convexa ($\forall z \in \mathbb{R}$, $x \in U$). Entonces, $I(p)$ es débil semicontinua inferiormente en $W^{1,q}(U)$.

Demostración. Queremos ver que si elegimos una sucesión tal que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ débilmente en } W^{1,q}(U), \tag{2.24}$$

entonces

$$I(u) \leq \liminf I(u_k) = l. \tag{2.25}$$

Ahora, al suponer (2.24) tenemos que u_k es acotada en $W^{1,q}(U)$, es decir,

$$\sup_k \|u_k\|_{W^{1,q}(U)} < \infty. \tag{2.26}$$

Podemos usar el resultado de compacidad de espacios de Sobolev(Teorema1.31), por lo cual esta sucesión acotada en $W^{1,q}(U)$ tiene una subsucesión convergente en $L^q(U)$ en el sentido fuerte.

Entonces tenemos otra subsucesión convergente

$$u_k \to u \text{ ctp en } U \tag{2.27}$$

En nuestro caso, al ser $|U| < \infty$, por el teorema de Egorov (ver apéndice) en 4, (2.27) converge uniformemente en E_ε con $|U - E_\varepsilon|$.

Ahora sea

$$F_\varepsilon = \left\{ x \in U : |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\} \tag{2.28}$$

por lo cual

$$|U - F_\varepsilon| \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0. \tag{2.29}$$

Tomamos

$$G_\varepsilon = E_\varepsilon \cap F_\varepsilon \tag{2.30}$$

entonces

$$|U - G_\varepsilon| < |U - E_\varepsilon| + |U - F_\varepsilon| \longrightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \tag{2.31}$$

Ahora, como L esta acotada inferiormente, podemos asumir que

$$L \geq 0 \tag{2.32}$$

pues si no es así podemos aplicar $\tilde{L} = L + \beta \geq 0$ para un β apropiado. En concecuencia

$$\begin{aligned} I(u_k) = \int_U L(\nabla u_k, u_k, x)dx &\geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_k, u_k, x)dx \\ &\geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u_k, x)dx \; + \; D_p L(\nabla u, u_k, x)(\nabla u_k - \nabla u)dx. \end{aligned} \tag{2.33}$$

La última desigualdad usa la definición de convexidad de L. Es decir, L es convexa si $\forall p$ $L(q,z,x) \geq L(p,z,x) + DL(p,z,x)(q-p)$ Siendo $q = \nabla u_k$, $p = \nabla u$

Como $u_k \rightrightarrows u$ en G_ε, entonces tenemos que $L(\nabla u_k, u_k, x) \rightrightarrows L(\nabla u, u, x)$
A partir de la última desigualdad. Por (2.27), (2.28) y (2.30).

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} L(Du_k, u_k, x) = \int_{G_\epsilon} L(Du, u, x)dx. \tag{2.34}$$

Además como $D_pL(\nabla u, u_k, x) \rightrightarrows D_pL(\nabla u, u, x)$ en G_ϵ y $Du_k \rightharpoonup Du$ en $L^q(U)$.
Vemos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\varepsilon} D_pL(\nabla u, u_k, x)(\nabla u_k - \nabla u)dx = 0. \tag{2.35}$$

Ahora con (2.34) y (2.35), deducimos de (2.33) que

$$l = \lim_{k\to\infty} I(u_k) \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)dx$$

$$\text{tomando } \lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon \to U$$

recordando (2.32) y del teorema de convergencia monotona (ver apéndice)

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq \int_U L(\nabla u, u, x)dx = I(u).$$

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq I(u)$$

$$l \geq \int_U L(Du, u, x)dx = I[u].$$

□

Teorema 2.6. *Existencia del Minimizante.*

Si L tiene la propiedad de coercitividad $L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q - B$ y es convexo en la variable p.

Pedimos que el conjunto de funciones admisibles sea no vacío. Entonces existe un $u \in \mathcal{A}$ tal que $I(u) = \min_{w\in\mathcal{A}} I(w)$.

Demostración. Sea $m := \inf_{w\in\mathcal{A}} I[w]$. Primero, si $m := +\infty$, no hay nada que hacer. Por lo cual suponemos que m es finito.

Sea $\{u_k\}$ sucesión minimizante pedimos que

$$I(u_k) \to m. \tag{2.36}$$

Queremos ver que $m = I(u)$ con $u \in A$.

Puedo suponer que $L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q$ haciendo ($\tilde{L} = L + B$), luego

$$I(w) \geq \int_U |\nabla w|^q dx. \tag{2.37}$$

Como m es finito, deducimos que

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q(U)} < \infty. \tag{2.38}$$

Sea $w \in \mathcal{A}$ como $w = g$ en ∂U y $u_k \in \mathcal{A}$, $u_k = g$ en ∂U en el sentido de la traza.

Entonces $u_k - w = 0$ en ∂U , luego, $u_k - w \in W_0^{1,q}$. Luego podemos aplicar el Teorema de Poincaré.

$$\|u_k\|_{L^q(U)} \leq \|u_k - w\|_{L^q(U)} + \|w\|_{L^q(U)}$$

$$\leq C\|\nabla(u_k - w)\|_{L^q(U)} + \|w\|_{L^q(U)}$$
$$\leq C\|\nabla u_k\|_{L^q(U)} + C\|\nabla w\|_{L^q(U)} + \|w\|_{L^q(U)} \leq C$$

la última desigualdad está acotada por (2.38).

Luego $\|u_k\|_{w^{1,q}(U)} < \infty$, entonces, tenemos una subsucesión convergente en $L^q(U)$ por el Teorema de compacidad 1.31 $u_k \to u$ en $L^q(U)$. Falta probar que u es admisible.

Observemos que: $u_k - w \in w_0^{1,q}(U)$ y $u - w \in w_0^{1,q}(U)$, entonces $u = g$ en ∂U y luego $u \in \mathcal{A}$.

Por el teorema 2.5 tenemos, $I[u] \leq \liminf_{k\to\infty} I[u_k] = m$. Como u pertenece al conjunto admisible, nos queda

$$I[u] = m = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w]$$

Por lo tanto, se ha demostrado el teorema de existencia.

□

2.3.4. Unicidad

Ahora, volvemos al tema de la unicidad. En general, podria haber muchos mínimos, por lo tanto, para asegurar la unicidad, se requiere suponer más condiciones. Supongamos que

$$L = L(p, x) \text{ es decir, no depende de z} \tag{2.39}$$

y que $p \mapsto L(p, x)$ es uniformemente convexa en x, es decir

$$\begin{cases} \exists\theta > 0 \text{ tal que} \\ \sum_{i,j=1}^n Lp_ip_j(p, x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n; x \in U). \end{cases} \tag{2.40}$$

Teorema 2.7. *(Unicidad del mínimo). Si (2.39) y (2.40) se cumplen, entonces el mínimo $u \in \mathcal{A}$ de $I[\cdot]$ es único.*

Demostración. Sea u, $\tilde{u} \in \mathcal{A}$ son mínimos de $I[\cdot]$. Tomamos $v := \frac{u+\tilde{u}}{2} \in \mathcal{A}$.

Notemos que por la suposición de convexidad uniforme (2.40) tenemos

$$L(p, x) \geq L(q, x) + D_pL(q, x) \cdot (p - q) + \frac{\theta}{2}|p - q|^2 \text{ con } x \in U,\ p,\ q \in \mathbb{R}^n. \tag{2.41}$$

Sea $q = \frac{Du+D\tilde{u}}{2}$, $p = Du$ tenemos que:

$$I[v] + \int_U D_pL\left(\left(\frac{Du + D\tilde{u}}{2}\right), x\right) \cdot \left(\frac{Du - D\tilde{u}}{2}\right) dx + \frac{\theta}{8}\int_U |Du - D\tilde{u}|^2 \leq I[u]. \quad (2.42)$$

Similarmente sea $q = \frac{Du+D\tilde{u}}{2}$, $p = D\tilde{u}$ tenemos que

$$I[v] + \int_U D_pL\left(\left(\frac{Du + D\tilde{u}}{2}\right), x\right) \cdot \left(\frac{D\tilde{u} - Du}{2}\right) dx + \frac{\theta}{8}\int_U |Du - D\tilde{u}|^2 dx \leq I[\tilde{u}]. \quad (2.43)$$

Al sumar y dividir por dos tenemos lo siguiente

$$I[v] + \frac{\theta}{8}\int_U |Du - D\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{I[u] + I[\tilde{u}]}{2}. \quad (2.44)$$

Entonces $I[v] \leq \frac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2}$.
Ahora como $I[u] = I[\tilde{u}] = \mathrm{mín}_{w\in\mathcal{A}} I[w] \leq I[v]$, tenemos que

$$I[v] \leq \frac{I[u] + I[\tilde{u}]}{2} = I[u] \leq I[v].$$

Es decir, $I[u] = I[v]$. Por lo cual deducimos que $Du = D\tilde{u}$, pues sino, por (2.44) tenemos $I[v] < \frac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2} = I[u]$ lo cual es absurdo.

Por lo tanto, tenemos $u = \tilde{u} + cte$ y como $u = \tilde{u} = g$ en ∂U, entonces $u = \tilde{u}$, como queríamos demostrar.

□

2.3.5. Solución débil para la ecuación de Euler-Lagrange

A continuación, queremos demostrar que el mínimo de $I[\cdot]$ en $\mathcal{A}$ es solución débil de la Ecuación de Euler-Lagrange. Vamos suponer que existe $C \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $x \in U$ tal que

$$|L(p, z, x)| \leq C\left(|p|^q + |z|^q + 1\right), \quad (2.45)$$

$$\begin{cases} |D_pL(p, z, x)| \leq C\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right) \\ |D_zL(p, z, x)| \leq C\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right). \end{cases} \quad (2.46)$$

Recordemos que antes formulamos la ecuación de Euler Lagrange asociada al funcional L de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(Du, u, x)\right)_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0, & \text{en } U \\ u = g, & \text{en } \partial U. \end{cases} \quad (2.47)$$

Si multiplicamos (2.47) por una función test $v \in C_c^\infty(U)$ e integramos por partes, obtenemos:

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i} + L_z(Du,u,x)v dx = 0. \tag{2.48}$$

Ahora, si $u \in W^{1,q}(U)$. Utilizando (2.46) vemos que

$$|D_p L(\nabla u,u,x)| \leq C\left(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1\right) \in L^{q'}(U) \text{ siendo } q' = \frac{q}{q-1}, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

En efecto, notemos que el término $|u|^{q-1}$ está en $L^q(U)$ ya que, $\int_U \left(|u|^{q-1}\right)^{q'} = \int_U |u|^q < \infty$ y con respecto al término $|\nabla u|^{q-1}$ este está en $L^q(U)$ pues, $\int_U \left(|\nabla u|^{q-1}\right)^{q'} = \int_U |\nabla u|^q < \infty$. De forma similar, tenemos que

$$|D_z L(\nabla u,u,x)| \leq C\left(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1\right) \in L^{q'}(U)$$

Luego utilizando la desigualdad de Hölder (Ver Apénice) tenemos

$$\int_U |L_{p_i}(\nabla u,u,x)v_{x_i}| \leq \|L_{p_i}(\nabla u,u,x)\|_{L^{q'}(U)} \|v_{x_i}\|_{L^q(U)} < \infty.$$

En consecuencia, utilizamos un argumento de densidad para que la igualdad (2.48) sea válida para toda función $v \in W_0^{1,q}(U)$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.8. Se dice que $u \in \mathcal{A}$ es una solución débil de (2.47) para la ecuación de Euler-Lagrange si verifica que

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i} + L_z(Du,u,x)v dx = 0 \text{ para toda } v \in W_0^{1,q}(U).$$

Teorema 2.9. *(Solución de la ecuación de Euler-Lagrange). Supongamos que L cumple con las condiciones (2.45), (2.46) y sea $u \in \mathcal{A}$ tal que $I[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w]$. Entonces u es solución débil de (2.47).*

Demostración. Sea $v \in W_0^{1,q}(U)$ y sea $i(\tau) := I[u+\tau v]$ $\tau \in \mathbb{R}$. Por (2.45), $i(\tau)$ es finita para todo τ.

Sea $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{i(\tau)-i(0)}{\tau} &= \int_U \frac{L(Du+\tau Dv, u+\tau v, x) - L(Du,u,x)}{\tau} dx \\ &= \int_U L^\tau(x) dx, \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde $L^\tau := \frac{1}{\tau}\left[L(Du+\tau Dv, u+\tau v, x) - L(Du,u,x)\right]$ para *ctp* en U. Notemos que

$$L^\tau(x) \to \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i} + L_z(Du,u,x)v \;\; ctp. \text{ cuando } \tau \to 0 \tag{2.50}$$

Además,

$$L^\tau(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{ds}L(Du+sDv,u+sv,x)ds$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du+sDv,u+sv,x)v_{x_i}$$
$$+ L_z(Du+sDv,u+sv,x)vds.$$

usando la desigualdad de Young (ver apéndice). Como $u, v \in W^{1,q}(U)$, las desigualdades (2.46), usando el mismo razonamiento que ántes implican que:

$$|L^\tau| \leq C\left(|Du|^q + |u|^q + |v|^q + 1\right) \in L^1(U) \text{ con } \tau \neq 0.$$

Utilizando el Teorema de Convergencia Dominada, deducimos de (2.49), (2.50) que i' existe y es igual a

$$\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i} + L_z(Du,u,x)vdx.$$

y como $i(\cdot)$ tiene un mínimo en $\tau = 0$, sabemos que $i'(0) = 0$ y por lo tanto u es solución débil. Que es lo que queríamos demostrar.

□

Observación 2.10. La ecuación de Euler-Lagrange (2.47) puede tener otras soluciones que no sean mínimos de $I[\cdot]$. Sin embargo, cuando $(p,z) \to L(p,z,x)$ es convexo para cada x, entonces cada solución es un mínimo.

Para ver esto, supongamos que $u \in \mathcal{A}$ es solución débil de

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(Du,u,x)\right)_{x_i} + L_z(Du,u,x) = 0, & \text{en } U \\ u = g, & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{2.51}$$

y sea $w \in \mathcal{A}$, utilizando la convexidad de $(p,z) \to L(p,z,x)$, tenemos que:

$$L(p,z,x) + D_pL(p,z,x)\cdot(q-p) + D_zL(p,z,x)\cdot(w-z) \leq L(q,w,x).$$

Sea $p = Du(x)$, $q = Dw(x)$, $z = u(x)$, $w = w(x)$ e integrando sobre U nos queda:

$$I[u] + \int_U D_pL(p,z,x)\cdot(Dw-Du) + D_zL(p,z,x)\cdot(w-u)dx \leq I[w].$$

por (2.51) tenemos que el segundo término del miembro izquierdo es cero, por lo cual

$$I[u] \leq I[w] \text{ para todo } w \in \mathcal{A}.$$

Como queríamos demostrar.

Capítulo 3

Paso de la montaña

En esta parte, buscaremos encontrar soluciones a la Ecuación de Euler-Lagrange, buscando puntos críticos de $I[\cdot]$ que no necesariamente sean mínimos.

3.1. Teorema de Paso de la Montaña

Veremos bajo que condiciones podemos asegurar que el funcional $I[\cdot]$ tiene puntos críticos.

3.1.1. Puntos Críticos.

Sea H un espacio de Hilber con imágen en los reales, con norma $\|\cdot\|$ y producto interno $(\cdot,\cdot)$. Sea $I : H \to \mathbb{R}$ un funcional en H.

Definición 3.1. Decimos que I es diferenciable en $u \in H$ si existe un $v \in H$ tal que

$$I[w] = I[u] + (v, w - u) + o(\|w - u\|) \quad \forall w \in H. \tag{3.1}$$

Observación 3.2. Escribimos $I'[u] = v$. Si v existe, entonces este es único. Pues, sean v_1 y v_2 tales que satisfacen 3.1, entonces tenemos:

$$I[w] = I[u] + (v_1, w - u) + o(\|w - u\|) \text{ y } I[w] = I[u] + (v_2, w - u) + o(\|w - u\|)$$

restando ambas igualdades nos queda $0 = (v_1 - v_2, w - u)$ esto es para toda $u \in H$, en particular para $u = v_2 - v_1 + w$, al reemplazar nos da como resultado $0 = v_1 - v_2$, que era lo que queriamos demostrar.

Definición 3.3. Decimos que I pertenece a $C^1(H; \mathbb{R})$ si $I'[u]$ existe para cada $u \in H$, y el mapeo $I' : H \to H$ es continuo.

Notación 3.4. Denotamos a $\mathcal{C}$ al conjunto de las I que pertenecen a $C^1(H; \mathbb{R})$.

Definición 3.5. Sea $c \in \mathbb{R}$, definimos $A_c := \{u \in H : I[u] \leq c\}$ y $K_c := \{u \in H : I[u] = c, I'[u] = 0\}$.

Definición 3.6. Decimos que u es punto crítico si $I'[u] = 0$ y c es valor crítico si $I[u] = c$ cuando u es punto crítico.

Vamos a necesitar recuperar una noción de compacidad.

Definición 3.7. El funcional $I \in C^1(H;\mathbb{R})$ satisface la condición compacidad de Palais-Smale si cada sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, cumple:

(i) $\{I[u_k]\}_{k=0}^{\infty}$ esta acotada.

(i) $I'[u_k] \to 0$ en H,

es precompacto en H, es decir, existe una $u \in H$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $u_{k_j} \to u$ en H.

Más adelante vamos a necesitar el siguiente teorema, el cual vamos a enunciar sin demostrarlo.

Teorema 3.8. *(Teorema de Deformación). Sea I tal que cumple la condición de Palais-Smale 3.7. Y además*

$$K_c = \emptyset. \tag{3.2}$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente chico, existe una constante $0 < \delta < \epsilon$ y un homeomorfismo $\eta \in C([0,1] \times H; H)$ tal que el los mapeos $\eta_t(u) = \eta(t,u)$ con $0 \leq t \leq 1, u \in H$. Satisfacen:

(i) $\eta_0(u) = u$ *con* $u \in H$.

(ii) $\eta_1(u) = u$ *con* $u \notin I^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$.

(iii) $I[\eta_t(u)] \leq I[u]$ *con* $u \in H$, $o \leq t \leq 1$.

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

3.1.2. Teorema de Paso de la montaña

Ahora utilizaremas un interesante teorema que se basa en la deformación η antes mencionada para deducir la existencia del punto crítico.

Teorema 3.9. *(Teorema de Paso de la Montaña). Sea $I \in \mathcal{C}$ tal que satisface la condición P-S 3.7. Y además*

(i) I[0]=0.

(ii) Existen unas constantes r, $a > 0$ tal que $I[u] \geq a$ si $\|u\| = r$.

(iii) Existe un elemento $v \in H$ con $\|v\| > r$, $I[v] \leq 0$.

Definimos $\Gamma := \{g \in C([0,1]; H) : g(0) = 0,\ g(1) = v\}$.
Entonces

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] \text{ es un valor crítico de } I.$$

Observación 3.10. Una forma de entender este teorema es imaginarse la siguiente situación: Estamos en un valle ubicado en el 0 y hay una cadena de montañas que nos rodea, afuera de esto, hay otro valle en el cual está ubicado v. Si queremos llegar a v la pregunta natural sería, ¿cuál camino conviene elegir? El teorema de paso de la montaña responde esta pregunta.

Demostración. Claramente $c \geq a$, pues suponemos $c < a$ entonces existe g tal que el $\max_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] < a$, entonces como $\|g(0)\| = 0$ y$\|g(1)\| = \|v\| > r$, al ser $\|g(t)\|$ es continua, existe t_0 tal que $\|g(t_0)\| = r$ por el Teorema del valor intermedio . Por hipótesis tenemos que $I(g(t_0)) \geq a$, pero $\max_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] < a$ lo cual es absurdo.

Ahora, supongamos que c no es un valor crítico de I, tal que

$$K_c = \emptyset. \tag{3.3}$$

Elegimos un ϵ lo suficientemente chico

$$0 < \epsilon < \frac{a}{2}. \tag{3.4}$$

De acuerdo con el Teorema de deformación 3.8, existe una constante $0 < \delta < \epsilon$ y un homeomorfismo $\eta : H \to H$ tal que

$$\eta_1 (A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}. \tag{3.5}$$

y

$$\eta_1(u) = u \text{ si } u \notin I^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]. \tag{3.6}$$

Por otro lado, por definición de ínfimo podemos seleccionar una $g \in \Gamma$ tal que satisfaga

$$\max_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] \leq c + \delta. \tag{3.7}$$

Entonces $\hat{g} := \eta\circ g$ también pertence a Γ, pues $\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$ y $\eta(g(1))) = \eta(v) - v$ por(3.6). Pero (3.7) implica $\max_{0\leq t\leq 1} I[\hat{g}(t)] \leq c-\delta$, siendo que $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] \leq c - \delta$, esto es absurdo.

□

3.1.3. Una aplicación

Para ilustrar la utilidad del teorema de paso a la montaña, consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f, & \text{en } U \\ u = 0, & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{3.8}$$

donde el operador Δ_p se define como $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ y se le llama "p-Lapaciano".

Con $|f(s)| \leq C(1+|s|^q)$ y $|f'(s)| \leq C(1+|s|^{q-1})$. Definimos $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ y pedimos que $0 \leq F(s) \leq \gamma f(s)s$ con $\gamma < \frac{1}{2}$ y que existan a, A tales que $a|s|^{q+1} \leq |F(s)| \leq A|s|^{q+1}$.

El funcional que usaremos es

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_U |\nabla u|^p dx - \int_U F(u)dx.$$

siendo u del espacio $W_0^{1,p}$. Necesitamos que $q+1 \leq p^* = \frac{pn}{n-p}$, es decir, $q \leq \frac{n(p-1)+p}{n-p}$.

Sea $J(u) = \frac{1}{p}\int_U |\nabla u|^p dx$, con $\mathcal{F}(u) = \int_U F(u)dx$ podemos reescribir Φ como $\Phi(u) = J(u) - \mathcal{F}(u)$, por otro lado tenemos que:

$$F(a+b) = F(a) + f(a)b + \int_0^1 (1-s)f'(a+sb)ds|v|^2.$$

Integrando, nos queda que

$$\mathcal{F}(u+v) = \mathcal{F}(u) + \int_U f(u)vdx + \int_U\int_0^1 (1-s)f'(u+sv)ds|v|^2 dx.$$

Por otro lado,usando la acotación para f', notamos que

$$\begin{aligned}\left|\int_U\int_0^1 (1-s)f'(u+sv)ds|v|^2 dx\right| &\leq C_p\int_U (|u|^{q-1}+|v|^{q-1})|v|^2 dx \\ &= C_p\left(\int_U |u|^{q-1}|v|^2 dx + \int_U |v|^{q+1}dx\right)\end{aligned}$$

Usando Hölder y Poincaré 1.23 podemos acotar el siguiente término

$$\begin{aligned}\int_U |u|^{q-1}|v|^2 dx &\leq \left(\int_U |u|^{q+1}dx\right)^{\frac{q-1}{q+1}}\left(\int_U |v|^{q+1}dx\right)^{\frac{2}{q+1}} \\ &= \|u\|_{L^{q+1}(U)}^{q+1}\|v\|_{L^{q+1}(U)}^2 \\ &\leq \|u\|_{L^{q+1}(U)}^{q+1}\|v\|_{W_o^{1,p}(U)}^2 \\ &= o\left(\|v\|_{W_o^{1,p}(U)}^2\right).\end{aligned}$$

Como resultado tenemos que: $(\mathcal{F}'(u), v) = \int_U f(u)vdx$.

Por otra parte, $\Phi'(u) = J'(u) - \mathcal{F}'(u)$.

Observemos que $\mathcal{F}'$ es Lipschitz, pues

$$\|\mathcal{F}'(u_1) - \mathcal{F}'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(U)} = \sup_{v\in W_0^{1,p}(U):\|v\|=1} |(\mathcal{F}'(u_1) - \mathcal{F}'(u_2), v)|.$$

Además, usando la acotación de f' podemos obtener que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}'(u_1) - \mathcal{F}'(u_2), v) &= \int_U f(u_1)v dx - \int_U f(u_2)v dx \\
&= \int_U f'(\zeta)(u_1 - u_2)v dx \\
&\leq \int_U C_p(1 + |\zeta|^{q-1})(u_1 - u_2)v dx \\
&\leq \int_U C_p(1 + |u|^{q-1} + |v|^{q-1})(u_1 - u_2)v dx \\
&\leq \int_U C_p(u_1 - u_2)v dx + \int_U C_p(|u|^{q-1} + |v|^{q-1})(u_1 - u_2)v dx.
\end{aligned}$$

Acotaremos el segundo término usando Hölder, la acotación de la primera es similar

$$\begin{aligned}
&\int_U C_p(|u|^{q-1} + |v|^{q-1})(u_1 - u_2)v dx \\
&\leq \|v\|_{L^{p^*}(U)} \left(\int_U (|u_1|^{q-1} + |u_2|^{q-1})^{\frac{np}{n(p-1)+p}} |u_1 - u_2|^{\frac{np}{n(p-1)+p}} \right)^{\frac{n(p-1)+p}{np}} \\
&\leq C \left(\int_U (|u_1|^{q-1} + |u_2|^{q-1})^{\frac{n(p-2)+2p}{n(p-1)+p}} \right)^{\frac{n(p-1)+p}{np}} \left(\int_U |u_1 - u_2|^{p^*} \right)^{\frac{n(p-1)+p}{np}}
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $\|\mathcal{F}'(u_1) - \mathcal{F}'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(U)} \leq C\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(U)}$.

También se puede probar que $\|J'(u_1) - J'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(U)} \leq C\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(U)}$. En efecto $\|J'(u_1) - J'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(U)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(U) : \|v\|=1} |(J'(u_1) - J'(u_2), v)|$. Es claro que $J'(u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$, utilizamos esto para acotar

$$\begin{aligned}
&(J'(u_1) - J'(u_2), v) \leq \int_U ||\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2||v| dx \\
&\leq \int_U |(|\nabla u_1|^{p-2} + |\nabla u_2|^{p-2})(\nabla(u_1 - u_2))||v| dx \\
&\leq \|v\|_{L^{p^*}} \left(\int_U |(|\nabla u_1|^{p-2} + |\nabla u_2|^{p-2})^{\frac{np}{n(p-1)+p}} |\nabla(u_1 - u_2)|^{\frac{np}{n(p-1)+p}} dx \right)^{\frac{n(p-1)+p}{np}} \\
&\leq C \left(\int_U |(|\nabla u_1|^{p-2} + |\nabla u_2|^{p-2})^{\frac{np}{n(p-2)+p}} dx \right)^{\frac{n(p-2)+p}{np}} \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^p(U)}.
\end{aligned}$$

Es decir $\|\Phi'(u_1) - \Phi'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(U)} \leq C\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(U)}$. Por lo tanto el funcional Φ es C^1.

Ahora debemos verificar que Φ satisfaga la condición de P-S 3.7.

Sea $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $W_0^{1,p}(U)$ tal que:

1. $|\Phi(u_k)| \leq c \ \forall k$

2. $\Phi'(u_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$

Debemos probar que existe una subsucesión convergente en $W_0^{1,p}(U)$.

Sea $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que $\|\Phi'(u_k)\| < \varepsilon \; \forall k \geq k_0$. Como $\|\Phi'(u_k)\| = \sup_{v\neq 0} \frac{(\Phi'(u_k),v)}{\|v\|}$. Esto nos dice que, $(\Phi'(u_k), v) \leq \varepsilon\|v\|$. Entonces $\left|\int_U |\nabla u_k|^{p-1}\nabla v dx - \int_U f(u_k) v dx\right| \leq \varepsilon\|v\| \; \forall v$, eligiendo $v = u_k$ nos queda $\left|\int_U |\nabla u_k|^p dx - \int_U f(u_k)u_k dx\right| \leq \varepsilon\|u_k\|$. Por otro lado $\Phi(u_k) = \frac{1}{p}\int_U |\nabla u_k|^p dx - \int_U F(u_k)dx \leq C$.

Recordemos que $0 \leq F(s) \leq \gamma f(s)s$ con $\gamma < \frac{1}{s}$. Multiplicando $\Phi(u_k)$ por $\frac{1}{\gamma}$ nos queda $\int_U \frac{1}{p}\frac{1}{\gamma}|\nabla u_k|^p - \frac{1}{\gamma}F(u_k)dx \leq C$. Sumando las dos expresiones obtenidas, tenemos que:

$$\int_U \left(\frac{1}{p}\frac{1}{\gamma} - 1\right)|\nabla u_k|^p dx + \int_U f(u_k)u_k - \frac{1}{\gamma}F(u_k)dx \leq C + \varepsilon\|u_k\|.$$

Como $\int_U f(u_k)u_k - \frac{1}{\gamma}F(u_k)dx \leq 0$, eligiendo $\varepsilon = 1$ tenemos que $\int_U \left(\frac{1}{p}\frac{1}{\gamma} - 1\right)|\nabla u_k|^p dx \leq C + \|u_k\|$. Es decir, $C\|u_k\|^p \leq C + \|u_k\|$.

Hemos probado que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada en $W_0^{1,p}(U)$. Entonces, existe una u en $W_0^{1,p}(U)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ y podemos afirmar que $u_k \to u$ en $L^{q+1}(U)$ siendo $q+1 < p^*$, por el teorema de R-K 1.31. Tenemos que $f(u_k) \to f(u)$ en $L^{p^*}(U)$.

Sea $w = \mathcal{F}'(u)$ y $w_k = \mathcal{F}'(u_k)$, veamos que $\mathcal{F}'(u_k) \to w$.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}'(u_k) - \mathcal{F}'(u)\|^2 &= (\mathcal{F}'(u_k) - \mathcal{F}'(u), w_k - w) \\
&= \int_U (f(u_k) - f(u))(w_k - w)dx \\
&\leq \left(\int_U (f(u_k) - f(u))^{\frac{q+1}{q}} dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_U (w_k - w)^{q+1} dx\right)^{\frac{1}{q+1}}.
\end{aligned}$$

Además

$$\|w_k - w\|_{L^{q+1}(U)} \leq \|w_k - w\|_{W_0^{1,p}(U)} = \|\mathcal{F}'(u_k) - \mathcal{F}'(u)\|_{W_0^{1,p}(U)}.$$

Simplificando la norma a ambos lados de la desigualdad, nos queda que

$$\|\mathcal{F}'(u_k) - \mathcal{F}'(u)\| \leq \|f(u_k) - f(u)\|_{L^{\frac{q+1}{q}}(U)} \leq C\|f(u_k) - f(u)\|_{L^{p^*}(U)} \to 0$$

Ahora verificaremos que Φ satisface las hipótesis geométricas del teorema.

Que $\Phi(0) = 0$ es claro. Si $\|u\|_{W_0^{1,p}(U)} = r$ entonces $\Phi(u) = \frac{1}{p}r^p - \int_U F(u)dx$. Por otro lado, usando que $a|s|^{q+1} \leq F(s) \leq \mathcal{A}|s|^{q+1}$ tenemos

$$\int_U F(u)dx \leq \int_U A|u|^{q+1}dx \leq C\left(\int_U |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{q+1}{q}} = Cr^{q+1}.$$

Reemplazando, nos queda que

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{p}r^p - Cr^{q+1} = r^p\left(\frac{1}{p} - Cr^{q+1-p}\right).$$

Si elegimos r tal que $\frac{1}{2p} = \frac{1}{p} - Cr^{q+1-p}$, despejando resulta que $r = \left(\frac{1}{2pC}\right)^{\frac{1}{q+1-p}}$ y para este r se verifica $\Phi(u) \geq \left(\frac{1}{2pC}\right)^{\frac{1}{q+1-p}} \frac{1}{2p}$. Sea $a := \left(\frac{1}{2pC}\right)^{\frac{1}{q+1-p}} \frac{1}{2p}$, ahora a y r satisfacen las hipótesis.

Sea $u_0 \in W_0^{1,p}(U)$ tal que $\|u_0\|_{W_0^{1,p}(U)} = 1$, Entonces:

$$\begin{aligned}
\Phi(tu_0) &= \frac{t^p}{p}\int_U |\nabla u_0|^p dx - \int_U F(tu_0)dx \\
&\leq \frac{t^p}{p}\int_U |\nabla u_0|^p dx - a\int_U |tu_0|^{q+1}dx \\
&\leq \frac{t^p}{p} - Ct^{q+1} = t^p\left(\frac{1}{p} - Ct^{q+1-p}\right).
\end{aligned}$$

Eligiendo $t > 0$ y $\left(\frac{1}{p} - Ct^{q+1-p}\right) < 0$ despejando t, nos queda $t > \left(\frac{1}{pC}\right)^{\frac{1}{q+1-p}}$. En conclusión, vimos que si $\|u\| = t$ con $t > \left(\frac{1}{pC}\right)^{\frac{1}{q+1-p}}$ entonces $\Phi(u) < 0$.

Hemos verificado que el funcional satisface las hipótesis del Teorema de paso de la montaña. Por lo tanto c es un valor crítico.

Capítulo 4

Apéndice

En este apéndice enunciaremos los resultados de análisis necesarios para entender esta monografía. No incluiremos las demostraciones, pero sí las referencias para el lector interesado.

Definición 4.1. Un espacio X es llamado separable si tiene un subconjunto denso numerable.

(ver [10], Pág. 96)

Definición 4.2. Un espacio lineal normado X es llamado reflexivo si $X = X^{**}$. Siendo X^* el espacio dual de X.

(ver [10], Pág. 132)

Proposición 4.3. *Sea $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\rho := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & si\ |t| < 1 \\ 0, & si\ |t| \geq 1. \end{cases}$$

tenemos $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Además si definimos $\rho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$, entonces $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y sop $(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$. A la familia $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se la denomina núcleo regularizante estándar. *Para esta familia tenemos los siguientes resultados*

1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $\|f * \rho_\varepsilon - f\| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.*

2. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y f es uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\sup_{x \in V^p} |f + \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0 \ \ si \varepsilon \to 0$$

   para todo $V' \subset\subset V$.

3. *Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.*

4. *Si además* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $f * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(Ver [1])

Teorema 4.4 (Desigualdad de interpolación). *Sea* $u \in L^p(U) \cap L^q(U)$ *con* $1 \leq p < q < \infty$ *y* r *es tal que* $p \leq r < q$, *entonces*

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)}^\alpha \|u\|_{L^q(U)}^{1-\alpha}$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ *y* $\alpha = p(q-r)/r(q-p)$.
(ver [4])

Teorema 4.5 (Teorema de Arzela-Ascolí). *Sea* X *un espacio compacto y* $f_n \in C(X, \mathbb{R}^k)$. *Si la colección* $\{f_n\}$ *está puntualmente acotada y es equicontinua, entonces la sucesión* $\{f_n\}$ *tiene una subsucesión que converge uniformemente.*

(Ver [8])

Teorema 4.6 (Partición de la unidad). *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y sea* $\mathcal{O}$ *un recubrimiento abierto de* A. *Entonces existe una colección* Φ *de funciones* φ *de la clase* C^∞ *definidas en un conjunto abierto que contiene* A, *con las siguientes propiedades:*

1. *Para cada* $x \in A$ *se tiene* $0 \leq \varphi \leq 1$

2. *Para cada* $x \in A$ *existe un conjunto abierto* V *que contiene* x *tal que todas, excepto un número finito de las* $\varphi \in \Phi$, *son* 0 *en* V.

3. *Para cada* $x \in A$ *se tiene* $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ *(en virtud de (2) para cada* x *esta suma es finita en un conjunto abierto que contiene a* x*).*

4. *Para cada* φ *existe un ocnjunto abierto* U *en* $\mathcal{O}$ *tal que* $\varphi = 0$ *al exterior de un conjunto cerrado contenido en* U.

(Una colección Φ *que satisfaga las condiciones (1) a (3) se denomina partición de la unidad para* A *con funciones* C^∞. *Si satisface también (4), se dice que es subordinada al recubrimiento* $\mathcal{O}$*)*

(ver [11], Pág 58)

Definición 4.7 (Topología débil). Decimos que $u_k \rightharpoonup u$ en $L^p(U)$.
Si $\int_U u_k g dx \to \int_U u g dx \; \forall g \in L^q(U)$.

(Ver [2])

Teorema 4.8. *Egorov: si* f *es medible* $f_k \to f$ *a.e.* x *en* A *con* $m(A) < \infty$ *,entonces,* $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon$*medible:* $A_\varepsilon \subset A$ *y* $m(A - A_\varepsilon) < \varepsilon$ *y* $f_k \rightrightarrows f$ *en* A_ε

(Ver [12])

Proposición 4.9. *[Desigualdad de Young] Sean* $1 < p, q < \infty$ *tales que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Entonces*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

con $a, b > 0$*.*

(Ver [4])

Proposición 4.10 (Desigualdad de Jensen)**.** *Asumamos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es convexa y que* $U \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto y acotado. Sea* $u : U \to \mathbb{R}$ *integrable. Entonces*

$$f\left(\fint_U u \, \mathrm{d}x \right) \leqslant \fint_U f(u) \, \mathrm{d}x,$$

donde

$$\fint_U u \, \mathrm{d}x = \frac{1}{|U|} \int_U u \, \mathrm{d}x.$$

(Ver [4])

Proposición 4.11 (Hölder Generalizado)**.** *Si* $p_i > 1$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$*, entonces* $\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} u_i dx \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n)}$

(Ver [4])

Teorema 4.12 (Convergencia Monótona)**.** *Sea* $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq ...$ *una sucesión creciente de funciones no negativas. Si* f *es el límite puntual de la sucesión* $\{f_k\}$*, entonces*

$$\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_E f_k.$$

(Ver [4])

Teorema 4.13 (Convergencia Mayorada)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones que converge a una función* f *en cada punto de* E*. Si existe una función* g *integrable sobre* E*, tal que*

$$|f_k| \leq g \quad (k = 1, 2, 3, ...)$$

en puntos de E*, entonces* f *es integrable sobre* E *y además,*

$$\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_E f_k.$$

(Ver [4])

Bibliografía

[1] J. Fernández Bonder. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, volume Curso de Grado del Departamento de Matemática. Fasciculo 7 of *Lecture notes for the regular course at the University of Buenos Aires*. 44

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications]. 44

[3] Lawrence C. Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, volume 74 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. v

[4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010. 44, 45

[5] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983. v

[6] N. V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*, volume 12 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. v

[7] O. A. Ladyˇ zenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural′ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. v

[8] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. 44

[9] Michael Renardy and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004. v

[10] George F. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-San Francisco, Calif.-Toronto-London, 1963. 43

[11] Michael Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965. 44

[12] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis*, volume 3 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces. 44