Ecuaciones Diferenciales II - 2° cuatrimestre 2015

Ecuación de Laplace y Poisson

1. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

   (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones armónicas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es armónica.

   (b) *Homotecias:* Si u es armónica, entonces $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ es armónica.

   (c) *Traslaciones:* Si u es armónica, entonces $u(x-\xi)$ es armónica.

   (d) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x,\gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x,\gamma)$ es armónica para cada γ.

   (e) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x,\gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\int_a^b u(x,\gamma)d\gamma$ es armónica.

   (f) *Diferenciación respecto a x:* Si u es armónica, entonces $D^\alpha u$ es armónica para todo multiíndice $\alpha \in I\!N^n$.

   (g) *Convoluciones:* Si u es armónica, entonces $\int u(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi$ es armónica.

2. Decimos que $v \in C^2(\Omega)$ es subarmónica si $\Delta v \geq 0$ en Ω.

   (a) Probar que si $v \in C(\overline{\Omega})$ entonces $\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$.
   Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que v satisface que $\Delta v > 0$ y luego probarlo para $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon |x|^2$ y hacer $\varepsilon \to 0$.

   (b) Probar que si $x_0 \in \Omega$ y $r < d(x_0, \partial\Omega)$, entonces

   $$v(x_0) \leq -\!\!\!\!\!\!\int_{B(x_0,r)} v(\xi)d\xi$$

   (c) Probar que v verifica el principio fuerte del máximo.

3. Notemos por B_1^+ a la semiesfera $\{x \in I\!R^n / \ |x| < 1, x_1 > 0\}$. Sea $u \in C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ con $u = 0$ en $\partial B_1^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y notamos $x = (x_1, x')$ con $x' \in I\!R^{n-1}$. Definimos

   $$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_1 \geq 0, \\ -u(-x_1, x') & \text{si } x_1 < 0, \end{cases}$$

   para $x \in B_1(0)$. Probar que U es armónica en $B_1(0)$. Concluir que u es C^∞ hasta $\{x_1 = 0\}$.

4. (a) Sea u una función armónica en $B_1(0)$. Probar que

   $$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$

   donde C depende sólo de la dimensión del espacio.

   (b) Deducir de (a) que si u es armónica en $B_R(0)$, entonces

   $$\sup_{B_{R/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B_R(0)} |u(x)|,$$

   donde C es la constante de (a).

   (c) Concluir que si u es armónica en $I\!R^n$ y acotada, entonces u es constante.

5. Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

   $$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } I\!R^n_+, \\ u = g & \text{en } \partial I\!R^n_+. \end{cases}$$

   ¿Vale la unicidad si eliminamos la hipótesis de que u sea acotada?

6. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una función u. Probar que u es armónica.

7. Sea $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (Ω acotado), la solución del siguiente problema,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u_n & = & 0 & \text{en } \Omega \\ u_n & = & g_n & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

   Probar que si $g_n \to g$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en Ω y $\Delta u = 0$ en Ω.

8. Probar que si u es armónica en $I\!R^n$ y $|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$, entonces u es un polinomio de grado a lo sumo k.

9. Probar que si el problema de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

   tiene una solución en Ω acotado ($u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$) entonces

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\, dS.$$

10. Sea Ω un dominio con borde regular. Probar que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{en } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

   entonces u es constante.