Cálculo II - Lic. en Química
Primer cuatrimestre - 2017

Práctico 4: Teorema de Stokes y Teorema de Gauss

1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
2. Sea S el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Verificar el Teorema de Stokes para el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.
3. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:
   (a) $S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a\}$.
   (b) $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq 0\}$.
   (c) $S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$.
4. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (zx^3y^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ (normal hacia arriba).
5. Evaluar $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y^2)\mathbf{i}+(y+z^2)\mathbf{j}+(z+x^2)\mathbf{k}$ y $\mathcal{C}$ es la frontera de la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj si ve desde arriba.
6. Verificar el Teorema de la Divergencia para el campo vectorial $\mathbf{F}$ y la región Ω en cada uno de los siguientes casos:
   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$, Ω es el cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.
   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yz, 3z^2)$, Ω es el sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.
   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$, Ω es el cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
7. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ el los siguientes casos:
   (a) $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y S es el borde de la esfera unitaria.
   (b) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y S es la frontera del cubo unitario $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
8. Calcular $\int_{\partial\Omega} (x + y^2 - z^3)\, dS$ donde $\Omega = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
9. Sea S una superficie cerrada. Usar el teorema de Gauss para mostrar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^2, entonces $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$.
10. Considerar la superficie parabólica S dada por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z \geq 0$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - xy)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x^3 + y)\mathbf{k}$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ usando el resultado del ejercicio anterior.