Ecuaciones Diferenciales no lineales
CÁLCULO DE VARIACIONES

1. Hallar $L = L(p, z, x)$ tal que la ecuación diferencial
$$-\Delta u + D\phi \cdot Du = f \qquad \text{en } \Omega,$$
sea la ecuación de Euler-Lagrange del funcional
$$I(w) = \int_\Omega L(Dw, w, x)\, dx.$$
En este problema, $\phi, f : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones regulares dadas.

2. La *regularización elíptica* de la ecuación del calor es
$$u_t - \Delta u - \varepsilon u_{tt} = 0 \qquad \text{en } \Omega \times (0, T], \tag{$\star$}$$
donde $\varepsilon > 0$. Mostrar que $(\star)$ es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a un funcional de energía
$$I_\varepsilon(w) = \int_0^T \int_\Omega L_\varepsilon(Dw, w_t, w, x, t)\, dx\, dt.$$

3. Probar, minimizando un funcional adecuado, que existe una solución débil no trivial del problema
$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$
donde $0 < p < 1$.

4. Sea $u \in H^1(U)$ una solución débil de
$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du))_{x_i} = f \quad \text{en } U,$$
donde L verifica:
$$L = L(p), \quad |D^2 L(p)| \le C \ (p \in \mathbb{R}^n), \quad \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(p) \xi_i \xi_j \ge \theta |\xi|^2 \ (p, \xi \in \mathbb{R}^n).$$
Probar que $u \in H^2_{loc}(U)$. En el siguiente ejercicio hay que usar el siguiente teorema (Teorema de trazas)
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto con borde suave y sea $1 \le p < 2_* := \frac{2(N-1)}{N-2}$. Entonces se tiene que
$$L^p(\partial\Omega) \subset\subset H^1(\Omega).$$

5. Probar que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{p-2} u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$
si y sólo si es un punto crítico del funcional
$$I(w) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Dw|^2 + |w|^2\, dx - \frac{1}{p} \int_{\partial\Omega} |w|^p\, dS.$$

6. Probar, usando el Teorema del Paso de la Montaña, que existe una solución débil no trivial de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es regular y, para algún $1 < p < 2^* - 1$ verifica

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^p), \qquad |f'(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$$

con $C > 0$ una constante. Además, existe $\gamma < \frac{1}{2}$ tal que

$$0 \leq F(s) \leq \gamma f(s)s$$

donde $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ y, finalmente,

$$a|s|^{p+1} \leq F(s) \leq A|s|^{p+1}.$$