Ecuaciones Diferenciales no lineales

SOLUCIONES DÉBILES

1. Consideremos el siguiente operador elíptico

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu.$$

donde $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$.

Probar que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilineal $B[\ ,\ ]$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram si $c(x) \geq -\mu$ $(x \in \Omega)$.

2. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

si verifica

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. $(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u))$.

(a) Probar que $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de (1) si y sólo si es solución débil de (1).

(b) Probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de (1).
(Sugerencia: Usar el ejercicio de la práctica anterior para probar que $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la usual en $H_0^2(\Omega)$)

3. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

para toda $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b) Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de este problema.

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

(a) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega$.

(b) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$.

(c) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div}(\vec{b}) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} b_j = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

5. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_\Omega f\, dx = 0$.

(b) Mostrar que si $f \in L^2(\Omega)$ verifica que $\int_\Omega f\, dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega u\, dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(\Omega)$ salvo constante.

(Sugerencia: Usar la desigualdad de Poincaré para funciones con promedio 0).

6. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.

7. Se define el *p-Laplaciano* como $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

(a) Probar que $u \in C_0^2(\Omega)$ es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

(b) Probar que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u dx$$

entonces es una solución débil del problema del p-Laplaciano.