Matemática III - Lic. Química
Primer cuatrimestre- 2017

Práctico 2: Campos Conservativos y Teorema de Green

Campos conservativos

1. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

   (a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
   (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
   (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy)$

2. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

   (a) $\mathbf{F} = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.
   (b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2, 0)$, y $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

3. Considerar el campo en $\mathbf{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}.$$

   (a) Demostrar que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Alcanza esto para concluir que $\mathbf{F}$ es un campo gradiente? Por qué?
   (b) Sea C la circunferencia unidad. Demostrar que

$$\int_C \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

   .
   (c) Concluir a partir de lo anterior que el campo $\mathbf{F}$ no es un campo gradiente.

Teorema de Green

4. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las siguientes funciones:

   (a) $P(x, y) = xy^2, \quad Q(x, y) = -yx^2$.
   (b) $P(x, y) = 2y, \quad Q(x, y) = x$.

5. Verificar el Teorema de Green para $P(x, y) = y^2$ y $Q(x, y) = x$, siendo $\mathcal{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

(a) Cuadrado con vértices $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$.

(b) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x$, $x \in [0,1]$, y $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, $x \in [0,1]$.

6. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

   (a) El disco D con centro $(0,0)$ y radio R

   (b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

   Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

8. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

9. Usar el Teorema de Green para evaluar $\int_{C^+} (y^2 + x^3)\ dx + x^4\ dy$ donde C^+ es el perimetro del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en dirección contraria a la que giran las agujas del reloj.