Ecuaciones Diferenciales De La Física Matemática-Ecuaciones Diferenciales II

Práctica 1: Separación de variables

1. Resolver, separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \mathrm{A} \\ u(0,y) &= 0 \\ u(\pi,y) &= 0 \\ u(x,\mathrm{A}) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{cases}$$

2. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, se busca $u = u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{en } D \\ u(x,0) &= f_1(x) \\ u(1,y) &= f_2(y) \\ u(x,1) &= f_3(x) \\ u(0,y) &= f_4(y) \end{cases}$$

3. En los ejercicios 1 y 2, imponer condiciones sobre las funciones f, g o f_i (según corresponda), de modo tal que las series obtenidas sean efectivamente soluciones del problema.

4. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en $\mathbb{R}^2$. $\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{en } |x| < 1 \\ u &= f & \text{en } |x| = 1 \end{cases}$

   donde $f \in C^1(\{|x| = 1\})$. (Sug.: Pasar a coordenadas polares).

5. Verificar por el método de separación de variables, que el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u & Q := (0,1) \times (0,1) \\ u &= 0 & \partial Q \end{cases}$$

   tiene como soluciones a

$$u_{k,j}(x,y) = \sin(\pi j x)\sin(\pi k y), \qquad \lambda_{k,j} = \pi(j^2 + k^2).$$

6. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = & 0 & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) & = A & t > 0 & \\ u(L,t) & = B & t > 0 & \\ u(x,0) & = & f(x) & 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x) & 0 < x < L \end{array}\right.$$