Matemática III
Primer cuatrimestre - 2017

Práctica 1

Campos vectoriales

1. Calcular el rotacional de cada uno de los siguientes campos vectoriales:

   (a) $F(x, y, z) = xi + yj + zk$

   (b) $F(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$

   (c) $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3i + 4j + 5k)$

2. Mostrar que $F(x, y, z) = y\cos(x)i + x\sin(y)j$ no es un campo vectorial gradiente.

3. Determinar si son conservativos o no los siguientes campos. En caso de serlo calcular su potencial:

   (a) $F = (y^2 z, 2xyz, xy^2)$.

   (b) $F = (y^2 z, 2x^2 yz, x^2 y)$.

   (c) $F = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$.

Curvas y trayectorias

4. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de t:

   (a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0.$

   (b) $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0.$

   (c) $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1.$

   (d) $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t = 1.$

5. ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m en el instante $t = 0$ si sigue la trayectoria dada por la función σ del Ejercicio 1.(a)?

6. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

Integral de longitud de arco e integrales de trayectoria

7. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

   (a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$.
   (b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$, $a = 10$, $b = 20$.

8. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathbb{C}} f(x, y, z)\, ds$, donde σ es una parametrización de $\mathbb{C}$, en los casos siguientes:

   (a) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \sigma(t) = (\mathrm{sen} t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$.
   (b) $f(x, y, z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte 1.
   (c) $f(x, y, z) = x \cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0, 1]$.

9. Si $f : [a, b] \to R$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

   (a) Mostrar que la longitud del gráfico de f en [a,b] es
   $$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$
   (b) Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Integrales curvilíneas

10. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral curvilńea de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas orientadas $\mathbb{C}$ dadas por las siguientes parametrizaciones:

    (a) $\sigma(t) = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$.
    (b) $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

11. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

12. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:
    $$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$
    Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

13. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea $\mathbb{C}$ una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que
    $$\int_{\mathbb{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbb{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$