Ecuaciones Diferenciales II - 2° cuatrimestre 2015

Ecuación del Calor

1. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

   (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.

   (b) *Traslaciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $u(x-\xi, t-\tau)$ es calórica.

   (c) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α, entonces $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α.

   (d) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α, entonces $\int_a^b u(x,t,\alpha)d\alpha$ es calórica.

   (e) *Diferenciación respecto a x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\frac{\partial^{|\alpha|+m}u}{\partial x^\alpha \partial t^m}(x,t)$ es calórica.

   (f) *Integración respecto x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, $n=1$, entonces $\int_{x_0}^x u(\xi,t)d\xi$ es calórica si $u_x(x_0,t)=0$ y $\int_a^t u(x,\tau)d\tau$ es calórica si $u(x,a)=0$.

   (g) *Convoluciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\int u(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ y $\int_a^b u(x,t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ son calóricas.

2. (a) Si $\phi=\phi(x,t),\ x\in\mathbb{R}^3,\ t>0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\phi(x,t)=w(|x|,t)$ con $w:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$\phi_{rr}+\frac{2}{r}\phi_r=\phi_t \quad t>0,\ r>0. \tag{1}$$

   (b) Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi=r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

3. Para $i=1,\dots,n$ consideramos $u_i=u_i(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0$, soluciones de

$$\begin{cases} (u_i)_t &= (u_i)_{xx} \\ u_i(x,0) &= \varphi_i(x). \end{cases}$$

   Probar que si definimos para $x\in\mathbb{R}^n,\ t>0$,

$$u(x,t)=u_1(x_1,t)u_2(x_2,t)\dots u_n(x_n,t)$$

$$\varphi(x)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)$$

   entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ con $u(x,0)=\varphi(x)$.

4. *Método de similaridad.* Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$\phi(x,t)=\phi(\lambda x,\lambda^2 t),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

5. *Principio de Duhamel*

   Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=g(x,t) & \text{en } (0,L)\times(0,+\infty), \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & \text{en } t>0, \\ u(x,0)=0 & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

   Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x,t)=\int_0^t \Phi(x,t;s)\,ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0,L)\times(s,+\infty), \\ \Phi(0,t;s) = \Phi(L,t;s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x,s;s) = g(x,s) & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

6. Sea $u(x,t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx}, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R})$ $\forall t>0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx, \quad \forall t>0.$$

7. Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto. Notamos $U_T = U\times(0,T)$ y $\Gamma_T = \big(\overline{U}\times\{0\}\big)\cup(\partial U\times(0,T))$ la frontera parabólica de U_T. Decimos que $v\in C^{2,1}(U_T)\cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \le 0 \text{ en } U_T.$$

   (a) Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

   (b) Sea $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v=\phi(u)$, entonces v es una subsolución.

8. Sea $Q_R(x,t) = B(x,R)\times(t-R^2,t)$. Probar que si $u(x,t)$ es solución de la ecuación del calor en $Q_2(0,0)$, existe una constante C universal tal que

$$\max_{Q_1(0,0)} |\nabla_x u(x,t)| \le C \max_{Q_2(0,0)} |u(x,t)|.$$

9. Sea $U_T = U\times(0,T)$ y sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n &= 0 & \text{en } U_T \\ u_n &= f_n & \text{en } \Gamma_T, \end{cases}$$

donde Γ_T es la frontera parabólica de U_T. Probar que si $f_n\to f$ uniformemente en Γ_T, entonces existe u regular tal que $u_n\to u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 & \text{en } U_T \\ u &= f & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

10. Probar los siguientes corolarios del teorema de estabilidad

   (a) Existe a lo sumo una solución de la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U_T \\ u = g & \text{en } \partial_p U_T \\ u = h & \text{en } \tilde{U}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2}$$

   (b) Sean u_1, u_2 las soluciones de dato h_1 y h_2 de (2). Entonces se verifica:

$$\int_U |u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dx \le \int_U |h_1(x)-h_2(x)|^2\,dx$$