Ecuaciones Diferenciales no lineales

Espacios de Sobolev

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(\Omega),\ |\alpha| \leq k$. Entonces
   (a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multiíndices α, β tales que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
   (b) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
   (c) Si $V \subset \Omega$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
   (d) Si $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ y
   $$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$
   (e) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
2. Probar que en cada clase de $W^{k,p}(\Omega)$ existe a lo sumo una función continua.
3. (a) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \leq p < \infty$ entonces $u \in AC[a,b]$.
   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces
   $$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}.$$
4. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon * u$ en Ω_ε (dónde η es el nucleo regularizante, η_ε las aproximaciones de la identidad y $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega /\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$). Entonces
   (a) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
   (b) $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.
5. Probar que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces
   $$\int_\Omega |Du|^2 dx \leq C \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2}.$$
   Concluir que en $H_0^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual.
6. Supongamos que Ω es conexo y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface $\nabla u = 0$ a.e. en Ω. Probar que u es constante en Ω.
7. Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y Ω tal que
   $$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$
   para cada $u \in H^1(\Omega)$, donde
   $$(u)_\Omega = \fint_\Omega u\, dx.$$
8. Sea $\alpha > 0$. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de α y de la dimensión del espacio, tal que
   $$\int_\Omega u^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,$$
   para toda $u \in H^1(\Omega)$ tal que $|\{x \in \Omega;\ u(x) = 0\}| \geq \alpha$.

9. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 con F' acotada. Supongamos que Ω es acotado y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \ (i = 1, \ldots, n).$$

10. Sea $1 < p < \infty$ y Ω acotado.

    (a) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

    (b) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y

    $$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \le 0\}, \end{cases}$$

    $$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \ge 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

    (Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

    $$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } z \ge 0 \\ 0 & \text{si } z < 0.) \end{cases}$$

    (c) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

    $$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } \{u = 0\}.$$