El Principio de Compacidad por concentración

Analía Silva

Departamento de Matemática, FCFMyN, Universidad Nacional de San Luis
Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL), CONICET-UNSL.

XXXIV Encuentro de estudiantes
UMA Salta 2023

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Recordemos que el campo gradiente se define

$$\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$$

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Recordemos que el campo gradiente se define

$$\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$$

Sea $\mathbf{F} = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$ un campo vectorial C^1 sobre $\mathbb{R}^n$ entonces la divergencia de $\mathbf{F}$ es la función de definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Recordemos que el campo gradiente se define

$$\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$$

Sea $\mathbf{F} = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$ un campo vectorial C^1 sobre $\mathbb{R}^n$ entonces la divergencia de $\mathbf{F}$ es la función de definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Luego, el Laplaciano se define como:

$$\triangle u = \operatorname{div}(\nabla u) = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}.$$

Recordemos el Teorema de Gauss

Teorema de la Divergencia

Sea Ω una región sólida simple y S la superficie frontera de Ω, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas ($C^1(\Omega)$) en una región abierta que contiene Ω. Entonces,

$$\int_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

Recordemos el Teorema de Gauss

Teorema de la Divergencia

Sea Ω una región sólida simple y S la superficie frontera de Ω, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas $(C^1(\Omega))$ en una región abierta que contiene Ω. Entonces,

$$\int_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

Observación (versión general)

Sea $u \in C^1(\Omega)$ considero el campo $F = u \cdot e_i$
Luego,

$$divF = u_{x_i} \qquad F \cdot \nu = u \cdot e_i \cdot \nu = u \cdot \nu_i$$

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot \nu_i \, d\mathbf{S} = \int_\Omega u_{x_i} \, dx.$$

Integración por partes

Sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega u_{x_i} v \, dx = -\int_\Omega u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Integración por partes

Sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega u_{x_i} v \, dx = - \int_\Omega u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Fórmula de Green

Sean $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = - \int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\mathbf{S}$$

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

Integración por partes

$$\int_\Omega \partial_i f \phi \, dx = - \int_\Omega f \partial_i \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} f\phi \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

Integración por partes

$$\int_\Omega \partial_i f \phi \, dx = -\int_\Omega f \partial_i \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} f\phi \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Queremos que la derivada de f en el sentido de las distribuciones cumpla:

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = -\int_\Omega f \partial_i \phi \, dx.$$

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

Integración por partes

$$\int_\Omega \partial_i f \phi \, dx = -\int_\Omega f \partial_i \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} f\phi \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Queremos que la derivada de f en el sentido de las distribuciones cumpla:

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = -\int_\Omega f \partial_i \phi \, dx.$$

Nos interesa encontrar una g_i

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = \int_\Omega g_i \phi \, dx$$

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

Integración por partes

$$\int_\Omega \partial_i f \phi \, dx = -\int_\Omega f \partial_i \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} f\phi \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Queremos que la derivada de f en el sentido de las distribuciones cumpla:

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = -\int_\Omega f \partial_i \phi \, dx.$$

Nos interesa encontrar una g_i

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = \int_\Omega g_i \phi \, dx$$

La g_i es única.

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi\, dx \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

Integración por partes

$$\int_\Omega \partial_i f \phi\, dx = -\int_\Omega f \partial_i \phi\, dx + \int_{\partial\Omega} f\phi \cdot \nu_i\, d\mathbf{S}.$$

Queremos que la derivada de f en el sentido de las distribuciones cumpla:

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = -\int_\Omega f \partial_i \phi\, dx.$$

Nos interesa encontrar una g_i

$$\langle \partial_i f, \phi \rangle = \int_\Omega g_i \phi\, dx$$

La g_i es única.

Ejercicio

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$.
Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f\varphi\, dx = 0\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

Definición

Una función $f \in L^1(\Omega)$ es una función de Sobolev si sus derivadas distribucionales $\partial_i f$ para $i = 1, \cdots, n$ se representan por una función $g_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Este espacio se llama $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Definición

Una función $f \in L^1(\Omega)$ es una función de Sobolev si sus derivadas distribucionales $\partial_i f$ para $i = 1, \cdots, n$ se representan por una función $g_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Este espacio se llama $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) \colon \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\} \; 1 \leq p < \infty,$$

Estos espacios estan equipados con las normas

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \; 1 \leq p < \infty$$

$f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$ si $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad$ cuando $n \to 0$

Definición

Una función $f \in L^1(\Omega)$ es una función de Sobolev si sus derivadas distribucionales $\partial_i f$ para $i = 1, \cdots, n$ se representan por una función $g_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Este espacio se llama $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) \colon \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\} \; 1 \leq p < \infty,$$

Estos espacios estan equipados con las normas

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

$f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$ si $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad$ cuando $n \to 0$
Cuando $p = 2$, $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ donde

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \, dx$$

Definición

Una función $f \in L^1(\Omega)$ es una función de Sobolev si sus derivadas distribucionales $\partial_i f$ para $i = 1, \cdots, n$ se representan por una función $g_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Este espacio se llama $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\} \; 1 \leq p < \infty,$$

Estos espacios estan equipados con las normas

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

$f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$ si $\|f_n - f\|_p \to 0$ cuando $n \to 0$
Cuando $p = 2$, $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ donde

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \, dx$$

$L^2(\Omega)$ es un Espacio de Hilbert.

Espacios de sobolev

Definimos el espacio de Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) = \{f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) : f, \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \cdots, n\}$$

La norma de este espacio es:

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\partial_i f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Espacios de sobolev

Definimos el espacio de Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) = \{f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) : f, \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \cdots, n\}$$

La norma de este espacio es:

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\partial_i f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Caso $p = 2$, sean $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$

$$(f, g) := \int_\Omega fg \, dx + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g \, dx$$

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

Notamos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Definición

LLamamos $W_0^{1,2}(\Omega)$ a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$.

Definición

LLamamos $W_0^{1,2}(\Omega)$ a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$.

Desigualdad de Poincaré

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y suponemos que existen constantes $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tales que $\Omega \subset \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < b\}$. Entonces existe una constante C que depende sólo de $(b - a)$ tal que

$$\int_\Omega |f|^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla f|^2\, dx$$

para toda $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definición

LLamamos $W_0^{1,2}(\Omega)$ a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$.

Desigualdad de Poincaré

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y suponemos que existen constantes $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tales que $\Omega \subset \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < b\}$. Entonces existe una constante C que depende sólo de $(b - a)$ tal que

$$\int_\Omega |f|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx$$

para toda $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Observaciones

- Usando Poincaré, obtenemos que $\|f\|_2 + \|\nabla f\|_2$ es equivalente a $\|\nabla f\|_2$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$.
- Sea Ω acotado y $\partial\Omega \in C^1$. Suponemos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces,

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ si y solo si } u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

¿Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ podemos asegurar que automáticamente u pertenece a otro espacio?.

¿Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ podemos asegurar que automáticamente u pertenece a otro espacio?.
El objetivo es obtener una acotación del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Para alguna $C > 0$, $1 \leq q < \infty$ y para toda función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

¿Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ podemos asegurar que automáticamente u pertenece a otro espacio?.
El objetivo es obtener una acotación del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Para alguna $C > 0$, $1 \leq q < \infty$ y para toda función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definición

El conjugado de Sobolev de 2 es

$$2^* := \frac{2n}{n-2}$$

Notemos que

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad 2^* > 2$$

Teorema de inmersión de Sobolev

Sea Ω Lipschitz, se tiene, que para toda $f \in W^{1,2}(\Omega)$, vale la desigualdad

$$\|f\|_q \leq C(p, q, \Omega)\|f\|_{1,2},$$

para $1 \leq q \leq 2^*$.
Mas aún, cuando $q < 2^*$ la inclusión $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ resulta compacta

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Definición

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil si verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi \, dx$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Definición

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil si verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi \, dx$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Miramos

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx$$

Decimos que el funcional $\Phi \in C^1$ satisface la condición de Palais Smale de nivel c $(PS)_c$.

Si para cada $\{u_k\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que:

1. $|\Phi(u_k)| \leq c \quad \forall\, k$
2. $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$

Podemos extraer una subsucesión convergente.

Decimos que el funcional $\Phi \in C^1$ satisface la condición de Palais Smale de nivel c $(PS)_c$.
Si para cada $\{u_k\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que:

1. $|\Phi(u_k)| \leq c \quad \forall k$
2. $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$

Podemos extraer una subsucesión convergente.

Teorema de paso de la montaña

Sea $\Phi \in C^1$ que satisface $(PS)_c$ tal que:

1. $\Phi(0) = 0$
2. Existe $r, a > 0$ tal que $\Phi(u) \geq a \quad \|u\| = r$
3. Existe $v \in H \quad \|v\| > r \quad$ tal que $\quad \Phi(v) \leq 0$

Entonces $K_c = \{u \in E : \Phi(u) = c \text{ y } \Phi'(u) = 0\} \neq \emptyset$.
Donde

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi(g(t))$$

con $\Gamma = \{g : [0,1] \longrightarrow H \text{ continua} \quad g(0) = 0 \quad g(1) = v\}$

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Tiene solución si $p < 2^*$.

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Tiene solución si $p < 2^*$.

¿Qué pasa si $p > 2^*$?

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

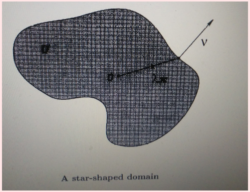
Tiene solución si $p < 2^*$.
¿Qué pasa si $p > 2^*$?

Definición

Un conjunto Ω se dice estrellado respecto al 0, si para cada $x \in \bar{\Omega}$, el segmento

$$\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

esta en Ω.



Identidad de Derrick-Pohozaev

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\nu.x)\,dS = \frac{n}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx$$

Identidad de Derrick-Pohozaev

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\nu . x)\,dS = \frac{n}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx$$

Lema

Supongo el $\partial\Omega \in C^1$ y Ω estrellado con respecto al 0. Entonces

$$x\nu(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega$$

Identidad de Derrick-Pohozaev

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\nu.x)\,dS = \frac{n}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx$$

Lema

Supongo el $\partial\Omega \in C^1$ y Ω estrellado con respecto al 0. Entonces

$$x\nu(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega$$

Teorema

Supongamos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución del problema y Ω es estrellado con respecto al 0 y $\partial\Omega$ es C^1. Entonces

$$u = 0 \text{ en } \Omega$$


TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRI
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Definiciones de Análisis Funcional

- Sea $\{x_k\}$ una sucesión en E.
  $x_k \rightharpoonup x$ débil si y sólo si $\langle f, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$ para toda $f \in E^*$.
- Sea $\{f_k\}$ una sucesión en E^*.
  $f_k \rightharpoonup f$ débil-* si y sólo si $\langle f_k, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para toda $x \in E$.

Definiciones de Análisis Funcional

- Sea $\{x_k\}$ una sucesión en E.
  $x_k \rightharpoonup x$ débil si y sólo si $\langle f, x_k \rangle \to \langle f, x \rangle$ para toda $f \in E^*$.
- Sea $\{f_k\}$ una sucesión en E^*.
  $f_k \rightharpoonup f$ débil-* si y sólo si $\langle f_k, x \rangle \to \langle f, x \rangle$ para toda $x \in E$.

Algunos hechos

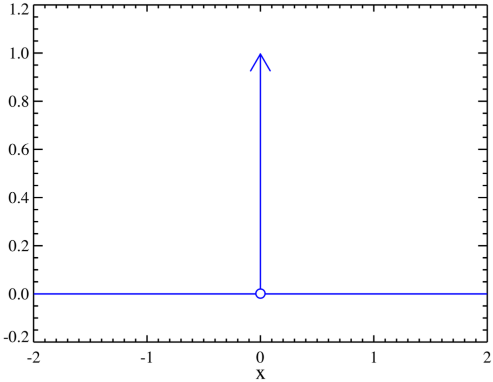
Dada una sucesión acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$ tomando una subsucesión conveniente podemos suponer que:

1. $u_j \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$
2. $u_j \longrightarrow u$ en $L^r(\Omega) \quad \forall 1 \leq r < 2^*$
3. $|u_j|^{2^*} \rightharpoonup d\nu$ débil*
4. $|\nabla u_j|^2 \rightharpoonup d\mu$ débil*

Donde ν y μ son medidas finitas.

La Delta de Dirac es una distribución

$$\delta_a(x) = \delta(x - a)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x)\, dx = f(a)$$

El principio de compacidad por concentracción (Lions ’80s)

Teorema (El principio de compacidad por concentracción)[Lions]

Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión débil convergente $W_0^{1,2}(\Omega)$ con limite débil u, tal que:

- $|\nabla u_j|^2 \rightharpoonup \mu$ débil-* en el sentido de las medidas.
- $|u_j|^{2^*} \rightharpoonup \nu$ débil-* en el sentido de las medidas.

Entonces, para un conjunto de indices I tenemos:

1. $\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{x_j} \quad \nu_j > 0$
2. $\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j\in I} \mu_j \delta_{x_j} \quad \mu_j > 0 \quad x_j \in \overline{\Omega}$
3. $\nu_j^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\mu_j}{S}$

Aplicación

Estudiemos la existencia de soluciones para el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda |u|^{r-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio regular y acotado, $2 < r < 2^*$.

Aplicación

Estudiemos la existencia de soluciones para el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda |u|^{r-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio regular y acotado, $2 < r < 2^*$.
Su funcional asociado es:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx - \lambda\frac{1}{r}\int_\Omega |u|^r\,dx$$

Aplicación

Estudiemos la existencia de soluciones para el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda |u|^{r-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio regular y acotado, $2 < r < 2^*$.
Su funcional asociado es:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\, dx - \lambda\frac{1}{r}\int_\Omega |u|^r\, dx$$

Teorema

Existe $\lambda_0 > 0$ tal que el problema tiene solución para $\lambda > \lambda_0$.

Claves de la prueba

- Si $c < \frac{1}{2} S^{\frac{n}{2}}$ entonces $I = \emptyset$.
  Necesitamos usar la Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces
  $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$
- Para λ grande $c < \frac{1}{2} S^{\frac{n}{2}}$.

El principio de compacidad por concentracción (Lions '80s)

Teorema (El principio de compacidad por concentracción)[Lions]

Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión débil convergente $W_0^{1,2}(\Omega)$ con limite débil u, tal que:

- $|\nabla u_j|^2 \rightharpoonup \mu$ débil-* en el sentido de las medidas.
- $|u_j|^{2^*} \rightharpoonup \nu$ débil-* en el sentido de las medidas.

Entonces, para un conjunto de indices I tenemos:

1. $\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{x_j} \quad \nu_j > 0$
2. $\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j\in I} \mu_j \delta_{x_j} \quad \mu_j > 0 \quad x_j \in \overline{\Omega}$
3. $\nu_j^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\mu_j}{S}$

- Paso 1: Desigualdad reversa de Hölder.
  Podemos suponer que $u = 0$.

$$S^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{2^*,\nu} \leq \|\phi\|_{2,\mu}.$$

Ideas de la prueba

- Paso 1: Desigualdad reversa de Hölder.
  Podemos suponer que $u = 0$.

$$S^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{2^*,\nu} \leq \|\phi\|_{2,\mu}.$$

- Paso 2: Lema de descomposición
  Sean μ, ν dos medidas no negativas y acotadas , con $q < r$, y tales que existe una constante $C > 0$ que verifica

$$\|\phi\|_{r,\nu} \leq C\|\phi\|_{q,\mu},$$

Para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces , existe un conjunto a lo sumo numerable de indices I, puntos $\{x_i\}_{i\in I} \subset \bar{\Omega}$ y escalares $\{\nu_i\}_{i\in I} \subset (0, \infty)$, tales que

$$\nu = \sum_{i\in I} \nu_i \delta_{x_i},$$

donde δ_{x_i} es la medida de Delta Dirac soportada x_i.

Ideas de la prueba del Lema de Descomposición

Lema 1

Sea ν una medida finita y no negativa que cumple que para todo $\delta > 0$ tal que para todo A Boreliano se tiene que $\nu(A) = 0$ o $\nu(A) \geq \delta$. Entonces existe $\{x_i\}_{i \in I}$ y $\nu_i > 0$ donde I es a lo sumo numerable tal que $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}$.

Ideas de la prueba del Lema de Descomposición

Lema 1

Sea ν una medida finita y no negativa que cumple que para todo $\delta > 0$ tal que para todo A Boreliano se tiene que $\nu(A) = 0$ o $\nu(A) \geq \delta$. Entonces existe $\{x_i\}_{i \in I}$ y $\nu_i > 0$ donde I es a lo sumo numerable tal que $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}$.

Lema 2

Sea ν una medida que cumple que

$$\left(\int_\Omega |\psi|^r \, d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_\Omega |\psi|^q \, d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que para todo A Boreliano se cumple que $\nu(A) = 0$ o $\nu(A) \geq \delta$

Continuamos con la prueba de CCP

- Paso 3: Caso general $u \neq 0$.

Lema Brezis-Lieb

$f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto y $f_n \rightharpoonup f$ en $L^p(\Omega)$ entonces

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \left(\|f_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f - f_n\|^p_{L^p(\Omega)} \right) = \|f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

- Paso 3: Caso general $u \neq 0$.

Lema Brezis-Lieb

$f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto y $f_n \rightharpoonup f$ en $L^p(\Omega)$ entonces

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \left(\|f_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f - f_n\|^p_{L^p(\Omega)} \right) = \|f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

- Paso 4: Relación entre los μ_i y los ν_i.

Continuamos con la prueba de CCP

- Paso 3: Caso general $u \neq 0$.

Lema Brezis-Lieb

$f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto y $f_n \rightharpoonup f$ en $L^p(\Omega)$ entonces

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \left(\|f_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f - f_n\|^p_{L^p(\Omega)} \right) = \|f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

- Paso 4: Relación entre los μ_i y los ν_i.
- Paso 5: Descomposición de los μ_i.

Más info...

- Mi página web: https://analiasilva.weebly.com/.
- Mi mail: analia.silva82@gmail.com.

Más info...

- Mi página web: https://analiasilva.weebly.com/.
- Mi mail: analia.silva82@gmail.com.

Muchas gracias